Teoría de muestreo: bases, frames y espacios invariantes por traslación

Antonio García García

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

Problema:

Recuperación **estable** de $x \in \mathcal{H}$ a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$:

Existen constantes $A, B > 0$ (cotas frame) tal que:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2\,, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Bases de Riesz y ortonormales, casos particulares de frames

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

Aplicación al muestreo en un espacio de Hilbert funcional $\mathcal{H}$:

La sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \right\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big) \, ,$$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \Big\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big)\,,$$

Para cada $f \in PW_\pi$,

$$f(t) = \Big\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \Big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \Big\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big)\,,$$

Para cada $f \in PW_\pi$,

$$f(t) = \Big\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \Big\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

PW_π es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS): Para cada $t \in \mathbb{R}$ se verifica

$$|f(t)| \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,, \quad f \in PW_\pi$$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \right\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big),$$

$$\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{ \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \right\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big) \,,$$

$$\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{ \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Teorema de Shannon

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \,, \quad t \in \mathbb{R}$$

Teoría clásica de muestreo

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi,\pi] \right\} = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi,\pi]\big)\,,$$

Muestreo irregular

$$\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{ \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-it_n w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

$\left\{ \dfrac{e^{-it_n w}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ base de Riesz o frame en $L^2[-\pi,\pi]$

Una prueba debida a Hardy (1941): Dualidad de Fourier

$$\mathcal{F} : PW_\pi \longleftrightarrow L^2[-\pi, \pi]$$

Una prueba debida a Hardy (1941): Dualidad de Fourier

$$\mathcal{F} : PW_\pi \longleftrightarrow L^2[-\pi, \pi]$$

- Desarrollamos $\widehat{f}$ en la base ortonormal $\{e^{-i(n+a)w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$:

$$\widehat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Aplicando la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a)\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}\Big)(t)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a)\frac{\sin \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})$$

Una prueba debida a Hardy (1941): Dualidad de Fourier

$$\mathcal{F}: PW_\pi \longleftrightarrow L^2[-\pi,\pi]$$

- Desarrollamos $\widehat{f}$ en la base ortonormal $\{e^{-i(n+a)w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$:

$$\widehat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Aplicando la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}\Big)(t)$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n+a) \frac{\sin \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})$$

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal

Matemáticamente, se corresponde con multiplicar el espectro de la señal por $\chi_{[-\pi,\pi]}$, lo que equivale en el dominio temporal a convolucionar con la función senc, que no se anula en el intervalo $(-\infty, 0)$. En la práctica no se puede construir, de manera exacta, tal filtro ya que ello implicaría conocer el futuro para calcular la salida del filtro en el momento actual (el filtro no es *causal* o *físicamente realizable*):

$$(f * \operatorname{senc})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\operatorname{senc} x\, dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita

Una función bandalimitada puede extenderse a todo $\mathbb{C}$ resultando una función entera que no podrá anularse en un intervalo de $\mathbb{R}$ salvo que sea la función nula

- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal

Por ejemplo, si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(n)+\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, el error que se comete $\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{\pi(\frac{1}{2}-n)}\right|$, podría ser infinito incluso cuando $|\varepsilon_n|\leq\varepsilon$, para todo $n\in\mathbb{Z}$

- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\operatorname{senc} t|^2 dt = +\infty$$

Escoger un **generador** φ **con buenas propiedades** y desarrollar una teoría de muestreo en el espacio:

$$V_\varphi^2 = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^2(\mathbb{R}) \,.$$

Escoger un **generador** φ **con buenas propiedades** y desarrollar una teoría de muestreo en el espacio:

$$V_\varphi^2 = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^2(\mathbb{R})\,.$$

Ejemplos

1. $\varphi = \mathrm{sinc} \implies V_\varphi^2 = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el **B-spline** de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA (**Wavelets**)

Escoger un **generador** φ **con buenas propiedades** y desarrollar una teoría de muestreo en el espacio:

$$V_\varphi^2 = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^2(\mathbb{R})\,.$$

Ampliar la teoría de muestreo anterior a otros espacios:

$$V_\varphi^p = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^p(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^p(\mathbb{R})\,,\ 1 \le p < \infty\,,$$

$$V_\varphi^\infty = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in c_0(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^\infty(\mathbb{R})\,,$$

$$V_\varphi(\infty) = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \Big\} \subset L^\infty(\mathbb{R})\,.$$

1. **Los espacios invariantes por traslación en matemáticas:**
    - Aproximación mediante espacios invariantes por traslación
    - Esquemas de aproximación vía interpolación cardinal, cuasi-interpolación, proyectores, convolución, operadores integrales
2. **Muestreo en espacios invariantes por traslación:**
    - Muestreo regular, irregular, generalizado (*average sampling*), multivariado.

1. **Los espacios invariantes por traslación en matemáticas:**
    - Aproximación mediante espacios invariantes por traslación
    - Esquemas de aproximación vía interpolación cardinal, cuasi-interpolación, proyectores, convolución, operadores integrales
2. **Muestreo en espacios invariantes por traslación:**
    - Muestreo regular, irregular, generalizado (*average sampling*), multivariado.

El problema del muestreo generalizado

Se considera un espacio invariante por traslación V_Φ^2 en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con p generadores (estables) $\Phi := \{\varphi_l\}_{l=1}^p$

$$\begin{aligned} V_\Phi^2 &:= \overline{\text{span}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\{\varphi_l(t-\alpha) \,:\, \alpha \in \mathbb{Z}^d\,, l = 1, 2, \dots, p\} \\ &= \Big\{ \sum_{l=1}^{p} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_{l,\alpha}\varphi_l(t-\alpha) \,:\, \{a_{l,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d) \Big\} \end{aligned}$$

El problema del muestreo generalizado

Se considera un espacio invariante por traslación V_Φ^2 en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con p generadores (estables) $\Phi := \{\varphi_l\}_{l=1}^p$

$$V_\Phi^2 := \overline{\text{span}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\big\{\varphi_l(t-\alpha)\ :\ \alpha\in\mathbb{Z}^d\,, l=1,2,\ldots,p\big\}$$
$$= \Big\{\sum_{l=1}^{p}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} a_{l,\alpha}\varphi_l(t-\alpha)\ :\ \{a_{l,\alpha}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}\in\ell^2(\mathbb{Z}^d)\Big\}$$

Dados s sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$ actuando en V_Φ^2, i.e.,

$$\mathcal{L}_j f = f * h_j\,,\quad f\in V_\Phi^2$$

El problema del muestreo generalizado

Se considera un espacio invariante por traslación V_Φ^2 en $L^2(\mathbb{R}^d)$ con p generadores (estables) $\Phi := \{\varphi_l\}_{l=1}^p$

Problema del muestreo generalizado:

Recuperar, de manera estable, toda función $f \in V_\Phi^2$ a partir de la sucesión de muestras

$$\{(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d,\ j=1,2,\dots,s}$$

tomadas en un retículo $M\mathbb{Z}^d$ de $\mathbb{R}^d$ (M matriz con entradas en $\mathbb{Z}$ y $detM > 0$), mediante una fórmula del tipo:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} (\mathcal{L}_j f)(M\alpha) S_j(t - M\alpha)\,, \quad t \in \mathbb{R}^d$$

Caso de una variable

Consideramos un espacio invariante por traslación en $L^2(\mathbb{R})$ con generador (estable) $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$:

$$V_\varphi^2 := \overline{\operatorname{span}}_{L^2(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \ : \ \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}$$

Dados s sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$ actuando en V_φ^2

Recuperar, de manera estable, toda función $f \in V_\varphi^2$ a partir de la sucesión de muestras

$$\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s} \,.$$

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2

Una base de Riesz en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una sucesión de la forma $\{Ue_k\}_{k=1}^\infty$, donde $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $U:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ es un operador acotado y biyectivo

- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2

Una sucesión $\{\varphi(\cdot-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2 si y sólo si $0<\|\Phi\|_0\leq\|\Phi\|_\infty<\infty$, donde $\|\Phi\|_0$ denota el ínfimo esencial de la función $\Phi(w):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{\varphi}(w+k)|^2$ en $(0,1)$, y $\|\Phi\|_\infty$ su supremo esencial

- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

V_φ^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Los funcionales evaluación en V_φ^2 están acotados

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo se tiene:

$$|f(t)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\|\Phi\|_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 , \quad f \in V_\varphi^2 .$$

Convergencia en norma $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia puntual, que resulta ser uniforme en $\mathbb{R}$.

Una dualidad tipo-Fourier: El isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$

Sea $\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi^2$ el isomorfismo definido por $\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

($Z\varphi$ es la **transformada de Zak** de φ)

- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi imw} K_t(w)$
- $\mathcal{T}_\varphi\left[e^{-2\pi imw} F(w)\right] = f(t-m)$ donde $f = \mathcal{T}_\varphi(F)$

Una dualidad tipo-Fourier: El isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$

Sea $\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi^2$ el isomorfismo definido por $\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

($Z\varphi$ es la **transformada de Zak** de φ)

- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi imw} K_t(w)$
- $\mathcal{T}_\varphi\left[e^{-2\pi imw} F(w)\right] = f(t-m)$ donde $f = \mathcal{T}_\varphi(F)$

Una dualidad tipo-Fourier: El isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$

Sea $\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi^2$ el isomorfismo definido por $\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)}e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

($Z\varphi$ es la **transformada de Zak** de φ)

- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi imw} K_t(w)$
- $\mathcal{T}_\varphi\left[e^{-2\pi imw} F(w)\right] = f(t-m)$ donde $f = \mathcal{T}_\varphi(F)$

Los sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$

Para sistemas de convolución $\mathcal{L}f = f * h$ muy generales:

1. La respuesta impulsional $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
2. La respuesta impulsional h es de la forma:

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$$

Los sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$

Para sistemas de convolución $\mathcal{L}f = f * h$ muy generales:

1. La respuesta impulsional $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
2. La respuesta impulsional h es de la forma:

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$$

Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$(\mathcal{L}f)(t) = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}\varphi}(t, \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$.

Una expresión para las muestras

En particular:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_j f)(rn) &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(rn,\cdot)\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(0,\cdot)e^{-2\pi i rn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \langle F, \overline{g_j}(\cdot)e^{-2\pi i rn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

donde $g_j(w) = (Z\mathcal{L}_j\varphi)(0,w)$.

Recuerdo que: $$(Z\mathcal{L}_j\varphi)(t,w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_j\varphi(t+m)e^{-2\pi i m w}$$

Una expresión para las muestras

En particular:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_j f)(rn) &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(rn,\cdot)\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(0,\cdot)e^{-2\pi i rn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \langle F, \overline{g_j}(\cdot)e^{-2\pi i rn\cdot}\rangle_{L^2(0,1)}\end{aligned}$$

donde $g_j(w) = (Z\mathcal{L}_j\varphi)(0,w)$.

Recuerdo que: $\quad (Z\mathcal{L}_j\varphi)(t,w) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_j\varphi(t+m)e^{-2\pi i m w}$

Consecuencia:

Hay que estudiar sucesiones del tipo:

$$\left\{b_j(w)e^{2\pi i r n w}\right\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s} \quad \text{en} \quad L^2(0,1)$$

Sucesiones $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}$ en $L^2(0,1)$

Sea la sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$, donde $b_j \in L^2(0,1)$ para $j = 1, 2, \dots, s$.

Sea **B** la matriz $s \times r$ de funciones definidas en $(0,1)$ dada por

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} b_1(w) & b_1(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_1(w+\frac{r-1}{r}) \\ b_2(w) & b_2(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_2(w+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s(w) & b_s(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_s(w+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

$\big($consideramos extensiones 1-periódicas de las funciones $b_j\big)$

Sucesiones $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}$ en $L^2(0,1)$

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} b_1(w) & b_1(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_1(w+\frac{r-1}{r}) \\ b_2(w) & b_2(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_2(w+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s(w) & b_s(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_s(w+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

y las constantes

$$\alpha_{\mathbf{B}} := \operatorname*{ess\,inf}_{w\in(0,1/r)} \lambda_{\text{mín}}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]\,; \quad \beta_{\mathbf{B}} := \operatorname*{ess\,sup}_{w\in(0,1/r)} \lambda_{\text{máx}}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]$$

Sucesiones $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}$ en $L^2(0,1)$

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} b_1(w) & b_1(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_1(w+\frac{r-1}{r}) \\ b_2(w) & b_2(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_2(w+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s(w) & b_s(w+\frac{1}{r}) & \cdots & b_s(w+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

y las constantes

$$\alpha_{\mathbf{B}} := \operatorname*{ess\,inf}_{w\in(0,1/r)} \lambda_{\text{mín}}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]\,; \quad \beta_{\mathbf{B}} := \operatorname*{ess\,sup}_{w\in(0,1/r)} \lambda_{\text{máx}}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]$$

$\lambda_{\text{mín}}$ ($\lambda_{\text{máx}}$) denota el autovalor más pequeño (más grande) de la matriz $\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)$

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\ldots,s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0<\alpha_{\mathbf{B}} \le \beta_{\mathbf{B}} < \infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y sólo si es un frame y $s=r$.

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\dots,s$ (o equivalentemente, $\beta_\mathbf{B} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_\mathbf{B}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0 < \alpha_\mathbf{B} \le \beta_\mathbf{B} < \infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_\mathbf{B}/r$ and $\beta_\mathbf{B}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y sólo si es un frame y $s=r$.

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\dots,s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.

Una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una sucesión Bessel si existe una constante $B>0$ tal que

$$\sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \quad \text{para todo } f\in\mathcal{H}$$

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0<\alpha_{\mathbf{B}}\le\beta_{\mathbf{B}}<\infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\dots,s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0 < \alpha_{\mathbf{B}} \le \beta_{\mathbf{B}} < \infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y sólo si es un frame y $s=r$.

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\dots,s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0 < \alpha_{\mathbf{B}} \le \beta_{\mathbf{B}} < \infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.

Una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ is a frame si existen constantes A, $B > 0$ (cotas frame) tales que

$$A\|f\|^2 \le \sum_{k=1}^\infty |\langle f, f_k\rangle|^2 \le B\|f\|^2, \qquad \text{para todo } f \in \mathcal{H}$$

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un sistema completo en $L^2(0,1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0,1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una sucesión Bessel en $L^2(0,1)$ si y sólo si $b_j\in L^\infty(0,1)$ para $j=1,\dots,s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}}<\infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es un frame en $L^2(0,1)$ si y sólo si $0<\alpha_{\mathbf{B}}\le\beta_{\mathbf{B}}<\infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz de $L^2(0,1)$ si y sólo si es un frame y $s=r$.

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Dada $f \in V_\varphi^2$, para cada $j = 1, 2, \dots, s$ tenemos que

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{L}_j f\big)(rn) &= \big\langle F(\cdot), \overline{g_j}(\cdot)\, e^{-2\pi i r n \cdot} \big\rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \Big\langle \sum_{k=0}^{r-1} F(w + k/r)\, g_j(w + k/r), e^{-2\pi i r n w} \Big\rangle_{L^2(0,1/r)}, \quad n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y $g_j(w) = (Z\mathcal{L}_j\varphi)(0, w)$.

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_1 f)(rn)e^{-2\pi irnw}, \dots, \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_s f)(rn)e^{-2\pi irnw}\Big)^\top$$

donde,

$$\mathbf{F}(w) := \Big(F(w), F(w+\frac{1}{r}), \dots, F(w+\frac{r-1}{r})\Big)^\top$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_1 f)(rn)e^{-2\pi irnw}, \dots, \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_s f)(rn)e^{-2\pi irnw}\Big)^\top$$

donde,

$$\mathbf{F}(w) := \Big(F(w), F(w+\frac{1}{r}), \dots, F(w+\frac{r-1}{r})\Big)^\top$$

Supongamos que $g_j \in L^\infty(0,1)$, y sea $\mathbf{a} := [a_1(w), \dots, a_s(w)]$ un vector con entradas en $L^\infty(0,1)$ tal que

$$\big[a_1(w), \dots, a_s(w)\big]\ \mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0] \ \text{ a.e. en } (0,1)\,.$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$
\begin{aligned}
F(w) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \langle F(\cdot), \overline{g}_j(\cdot)\, e^{-2\pi i r n \cdot} \rangle_{L^2(0,1)} r\, a_j(w) e^{-2\pi i n r w} \\
&= r \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn) a_j(w) e^{-2\pi i n r w} \quad \text{en } L^2(0,1)
\end{aligned}
$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$F(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \langle F(\cdot), \overline{g}_j(\cdot)\, e^{-2\pi i r n \cdot} \rangle_{L^2(0,1)} r\, a_j(w) e^{-2\pi i n r w}$$
$$= r \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn) a_j(w) e^{-2\pi i n r w} \quad \text{en } L^2(0,1)$$

Consecuencia:

Las sucesiones $\{\overline{g_j}(w)\, e^{-2\pi i r n w}\}$ y $\{r a_j(w) e^{-2\pi i r n w}\}$ son frames duales en $L^2(0,1)$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Consecuencia:

Las sucesiones $\{\overline{g_j}(w)\, e^{-2\pi irnw}\}$ y $\{ra_j(w)e^{-2\pi irnw}\}$ son frames duales en $L^2(0,1)$

Los frames $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ son frames duales en $\mathcal{H}$ si se verifica alguno de los desarrollos (equivalentes):

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,f_k\rangle g_k=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,g_k\rangle f_k\,,\quad f\in\mathcal{H}$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

El isomorfismo $\mathcal{T}_\varphi$ da la siguiente fórmula de muestreo en V_φ^2:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{T}_\varphi\Big[r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_j f)(rn)a_j(w)e^{-2\pi inrw}\Big](t)\\
&= r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_j f)(rn)\mathcal{T}_\varphi[a_j(\cdot)e^{-2\pi irn\cdot}](t)\\
&= r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_j f)(rn)(\mathcal{T}_\varphi a_j)(t-rn)\\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{j=1}^{s}(\mathcal{L}_j f)(rn)S_{j,\mathbf{a}}(t-rn) \quad \text{en } V_\varphi^2
\end{aligned}$$

Un teorema de muestreo generalizado regular

Supongamos que la función $g_j = Z\mathcal{L}_j\varphi(0,\cdot)$ pertenece a $L^\infty(0,1)$ $(\equiv \beta_{\mathbf{G}} < \infty)$ para $j = 1, 2, \dots, s$. Son condiciones equivalentes:

1. $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$
2. Existe un frame en V_φ^2 de la forma $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - rn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ tal que, para todo $f \in V_\varphi^2$,
$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} \big(\mathcal{L}_j f\big)(rn)\ S_{j,\mathbf{a}}(\cdot - rn) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})$$
3. Existen funciones $a_j \in L^\infty(0,1)$, $j = 1, 2, \dots, s$, tal que
$$\big[a_1(w), \dots, a_s(w)\big]\, \mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0]$$
a.e. en $(0,1)$

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en $\mathbb{R}$
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\big[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\big]\,,$$

  donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \big[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\big]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0,1)$
- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2. La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,

$$S_{j,\mathbf{a}}(t) = r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle a_j(w), e^{-2\pi i n w}\rangle\varphi(t-n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_j(n)\varphi(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en $\mathbb{R}$
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\big[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\big]\,,$$

  donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \big[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\big]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0,1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\, j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2. La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en $\mathbb{R}$
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\left[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\right],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \left[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\right]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0,1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2. La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j), \quad j = 1, 2, \ldots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en $\mathbb{R}$
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\big[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\big]\,,$$

  donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \big[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\big]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0,1)$
- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2. La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en $\mathbb{R}$
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\left[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\right],$$

  donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \left[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\right]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0,1)$
- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\ldots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2. La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{a}}(t - rn)$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{a}}(t - rn)$$

$$S_{j,\mathbf{a}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_j(k)\varphi(t-k)$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{a}}(t - rn)$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left\{ \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) d_j(m - rn) \right\} \varphi(t - m)$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{a}}(t-rn) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left\{ \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) d_j(m-rn) \right\} \varphi(t-m) \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \, \varphi(t-m) \end{aligned}$$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\text{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\text{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Es decir, $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \le p \le \infty$

Para $1 \le p \le \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Es decir, $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

$$f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \text{ si y sólo si } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(t-n)| \in L^p[0,1]\,,\ 1 \le p \le \infty$$

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \text{ espacio de Banach con } \quad |f|_p := \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(t-n)| \Big\|_{L^p[0,1]}$$

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\text{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

  Es decir, $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$

  Para $1 \leq p' \leq p \leq \infty$,

  $$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$$

  $$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^{p'}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R})$$

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)

Los espacios invariantes por traslación V^p_φ, $1 \le p \le \infty$

Para $1 \le p \le \infty$ definimos:

$$V^p_\varphi := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V^p_φ (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\text{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)

Existen constantes $0 < A \leq B$ tales que:

$$A\|a\|_{\ell^p} \leq \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)\|_{L^p} \leq B\|a\|_{\ell^p}$$

para toda sucesión $a \in \ell^p(\mathbb{Z})$ si $1 \leq p < \infty$, o $a \in c_0(\mathbb{Z})$ si $p = \infty$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \le p \le \infty$

Para $1 \le p \le \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)

Concepto L^p-estabilidad es independiente de p (para $\varphi \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$)

- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \leq p \leq \infty$

Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \le p \le \infty$

Para $1 \le p \le \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\text{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

La suma puntual $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\varphi(t-n)$ define una función continua en $\mathbb{R}$

Los espacios invariantes por traslación V_φ^p, $1 \le p \le \infty$

Para $1 \le p \le \infty$ definimos:

$$V_\varphi^p := \overline{\operatorname{span}}_{L^p(\mathbb{R})}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$
- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una p-base de Riesz de V_φ^p (o φ tiene shifts L^p-estables)
- φ es continua en $\mathbb{R}$

$$V_\varphi^p = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^p(\mathbb{Z}) \Big\} \quad 1 \le p < \infty$$

$$V_\varphi^\infty = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in c_0(\mathbb{Z}) \Big\}$$

Los sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$

Distinguimos dos tipos de sistemas $\mathcal{L}$:

1. La respuesta impulsional $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$
2. La respuesta impulsional h es de la forma:

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$$

Los sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$

Distinguimos dos tipos de sistemas $\mathcal{L}$:

1. La respuesta impulsional $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$
2. La respuesta impulsional h es de la forma:

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$$

(En este caso suponemos que $\varphi^{(N)}$ existe en $\mathbb{R}$, y que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi^{(k)}(t-n)|$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$ para cada $k = 0, 1, \ldots, N$)

Los sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$

Distinguimos dos tipos de sistemas $\mathcal{L}$:

1. La respuesta impulsional $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \equiv L^1(\mathbb{R})$
2. La respuesta impulsional h es de la forma:

$$h = \sum_{k=0}^{N} c_k \delta^{(k)}(t + d_k)$$

Para estos sistemas $\mathcal{L}$, la sucesión $\{(\mathcal{L}\varphi)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$

$$\left(\left\| \{(h * \varphi)(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^1} \leq |h|_1 |\varphi|_\infty \right)$$

Muestreo en $\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Sea $\mathbf{G}$ la matriz $s \times r$ de funciones definidas en $[0,1)$ dada por

$$\mathbf{G}(x) := \begin{bmatrix} g_1(x) & a_1(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_1(x+\frac{r-1}{r}) \\ g_2(x) & g_2(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_2(x+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_s(x) & g_s(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_s(x+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

$$g_j(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n)e^{-2\pi inx} \in \mathcal{A} \ \ (\textbf{Álgebra de Wiener}),\ j = 1,\ldots,s$$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Sea $\mathbf{G}$ la matriz $s \times r$ de funciones definidas en $[0,1)$ dada por

$$\mathbf{G}(x) := \begin{bmatrix} g_1(x) & a_1(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_1(x+\frac{r-1}{r}) \\ g_2(x) & g_2(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_2(x+\frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_s(x) & g_s(x+\frac{1}{r}) & \cdots & g_s(x+\frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

$$g_j(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j\varphi)(n)e^{-2\pi i n x} \in \mathcal{A} \quad (\textbf{Álgebra de Wiener}),\ j = 1,\ldots,s$$

Existe $\mathbf{d} := \big[d_1(x), d_2(x), \ldots, d_s(x)\big]$ con $d_j \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\big[d_1(x), d_2(x), \ldots, d_s(x)\big]\ \mathbf{G}(x) = \big[1, 0, \ldots, 0\big]$$

si y sólo si $\mathrm{rango}[\mathbf{G}(x)] = r$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

En el caso en que $\mathrm{rango}[\mathbf{G}(x)] = r$ para todo $x \in \mathbb{R}$, todas las soluciones de

$$\left[d_1(x), d_2(x), \dots, d_s(x)\right] \mathbf{G}(x) = \left[1, 0, \dots, 0\right]$$

con entradas en $\mathcal{A}$ vienen dadas por la primera fila de la matrices:

$$\mathbf{D}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w)\left[\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)\right],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = \left[\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)\right]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $\mathcal{A}$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$f(t) = \sum a_n \varphi(t-n) \in \operatorname{span}\{\varphi(t-n)\} \longmapsto F(x) = \sum a_n e^{-2\pi i n x}$$

Muestreo en $\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{F}(x) = r\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_1 f)(rn)e^{-2\pi irnx}, \dots, \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_s f)(rn)e^{-2\pi irnx}\right)^\top$$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{F}(x) = r\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_1 f)(rn)e^{-2\pi irnx},\dots,\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_s f)(rn)e^{-2\pi irnx}\right)^\top$$

$$\mathbf{F}(x) := \left(F(x), F(x+\frac{1}{r}),\dots,F(x+\frac{r-1}{r})\right)^\top$$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\mathbf{G}(x)\mathbf{F}(x) = r\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_1 f)(rn)e^{-2\pi irnx}, \dots, \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_s f)(rn)e^{-2\pi irnx}\right)^\top$$

Multiplicando por un $\left[d_1(x), d_2(x), \dots, d_s(x)\right]$ con $d_j \in \mathcal{A}$ apropiado:

$$F(x) = r\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_j f)(rn)\ d_j(x)\ e^{-2\pi irnx} \quad \text{en } \mathcal{A}$$

Muestreo en $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Multiplicando por un $\big[d_1(x), d_2(x), \dots, d_s(x)\big]$ con $d_j \in \mathcal{A}$ apropiado:

$$F(x) = r \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn)\ d_j(x)\ e^{-2\pi irnx} \quad \text{en } \mathcal{A}$$

Como la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}) \\ F(x) = \sum_n a_n e^{-2\pi inx} & \longmapsto & f(t) = \sum_n a_n \varphi(t-n) := \varphi *' a \end{array}$$

es lineal y acotada $\big(\|\varphi *' a\|_p \le |\varphi|_\infty \|a\|_{\ell^1}\big)$

Muestreo en span$\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Multiplicando por un $\big[d_1(x), d_2(x), \dots, d_s(x)\big]$ con $d_j \in \mathcal{A}$ apropiado:

$$F(x) = r\sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_j f)(rn)\ d_j(x)\ e^{-2\pi i rnx} \quad \text{en } \mathcal{A}$$

Finalmente:

$$f = \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \quad \text{en } L^p(\mathbb{R})$$

donde

$$S_{j,\mathbf{d}}(t) = r\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{d}_j(n)\varphi(t-n) = \varphi *' \widehat{d}_j$$

Muestreo en V_φ^p $(1 \leq p < \infty)$

$\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^p y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_d : & V_\varphi^p & \longrightarrow & V_\varphi^p \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

Muestreo en V_φ^p $(1 \le p < \infty)$

$\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^p y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_d : & V_\varphi^p & \longrightarrow & V_\varphi^p \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

$$\|\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}\|_{\ell^p} \le C_j \|f\|_p \text{ ya que } \left\|\{(h_j * f)(n)\}\right\|_{\ell^p} \le |h_j|_q \|f\|_p \,.$$

Finalmente, se utiliza que: $\|\phi *' a\|_p \le |\phi|_\infty \|a\|_{\ell^p}$

Muestreo en V_φ^p $(1 \leq p < \infty)$

$\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^p y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_d: & V_\varphi^p & \longrightarrow & V_\varphi^p \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

Tomando $\{f_N\} \in \text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $f_N \to f \in V_\varphi^p$, como

$$\|f - \Gamma_d f\|_p = \|f - f_N + \Gamma_d f_N - \Gamma_d f\|_p \leq (1 + \|\Gamma_d\|)\|f - f_N\|_p\,,$$

Muestreo en V_φ^p $(1 \le p < \infty)$

$\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^p y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_d : & V_\varphi^p & \longrightarrow & V_\varphi^p \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

se obtiene,

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Convergencia en $L^p(\mathbb{R})$, absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

Muestreo en V_φ^∞

Análogamente, $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^∞ y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{cccl} \Gamma_d : & V_\varphi^\infty & \longrightarrow & V_\varphi^\infty \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

(estamos suponiendo que $\varphi, \varphi^{(k)} \in C(\mathbb{R})$ se anulan en ∞, $0 \le k \le m$)

Muestreo en V_φ^∞

Análogamente, $\operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es **denso** en V_φ^∞ y el operador muestreo Γ_d **acotado**

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_d : & V_\varphi^\infty & \longrightarrow & V_\varphi^\infty \\ & f & \longmapsto & \Gamma_d f = \sum_{j=1}^s \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(\cdot - rn) \end{array}$$

(estamos suponiendo que $\varphi, \varphi^{(k)} \in C(\mathbb{R})$ se anulan en ∞, $0 \le k \le m$)

Para cada $f \in V_\varphi^\infty$ se tiene:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t - rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Convergencia absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$.

Muestreo estable en V_φ^p $(1 \le p \le \infty)$

Recuperación *estable* de $f \in V_\varphi^p$ $(1 \le p \le \infty)$ a partir de la sucesión de muestras $\big\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\big\}_{n\in\mathbb{Z},\ j=1,2,\dots,s}$:

Para $1 \le p \le \infty$, existen constantes $0 < A_p \le B_p$ tales que:

$$A_p\|f\|_p \le \sum_{j=1}^{s} \|\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^p} \le B_p\|f\|_p\,, \quad f \in V_\varphi^p\,.$$

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \ : \ \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \;:\; \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

Supongamos que:

- $\varphi \in C(\mathbb{R}) \cap W(L^\infty, \ell^1)$
- Se verifican las condiciones del teorema de muestreo en $\text{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, i.e., $h_j \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\mathrm{rango}[\mathbf{G}(x)] = r$, para todo $x \in \mathbb{R}$
- $\varphi^{(k)} \in C(\mathbb{R}) \cap W(L^\infty, \ell^1)$, $1 \le k \le m$, si aparecen derivadas hasta orden m en los sistemas de convolución

donde $W(L^\infty, \ell^1)$ denota el **espacio amalgama de Wiener**:

$$W(L^\infty, \ell^1) := \left\{ f \;:\; \|f\|_W := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f\chi_{[n,n+1)}\|_\infty < \infty \right\}$$

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

φ y $S_{j,\mathbf{d}}$ en $W(L^\infty, \ell^1)$ implica la convergencia uniforme en compactos de las series:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\varphi(t-n)| \quad \text{y} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |S_{j,\mathbf{d}}(t-n)|\,, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

$(\|\varphi *' a\|_W \leq \|\varphi\|_W \; \|a\|_1)$

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \;:\; \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

Para toda $f \in V_\varphi(\infty)$ se tiene:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Convergencia absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{R}$.

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \;:\; \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

Para toda $f \in V_\varphi(\infty)$ se tiene:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Convergencia absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{R}$.

Si $f \in V_\varphi(\infty)$, existe $\{f_q\} \subset \operatorname{span}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que $f_q \longrightarrow f$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$ y $\sup_q \|f_q\|_\infty < \infty$.

Muestreo en $V_\varphi(\infty)$

$$V_\varphi(\infty) := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \varphi(t-n) \ :\ \{a_n\} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}) \right\}$$

Para toda $f \in V_\varphi(\infty)$ se tiene:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Convergencia absoluta y uniforme en compactos de $\mathbb{R}$.

Habría que tomar límites en:

$$f_q(t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f_q)(rn) S_{j,\mathbf{d}}(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Referencias:

- **Riesz bases in $L^2(0,1)$ related to sampling in shift-invariant spaces**. *J. Math. Anal. Appl.*, 308:703–713, 2005 (con G. Pérez-Villalón y A. Portal)
- **Dual frames in $L^2(0,1)$ connected with generalized sampling in shift-invariant spaces**. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 20:422–433, 2006 (con G. Pérez-Villalón)
- **Generalized sampling in shift-invariant spaces with multiple stable generators**. *J. Math. Anal. Appl.*, 337:69–84, 2008 (con M. A. Hernández-Medina y G. Pérez-Villalón)
- **Multivariate generalized sampling in shift-invariant spaces and its approximation properties**. *J. Math. Anal. Appl.*, 355:397–413, 2009 (con G. Pérez-Villalón)
- **Sampling, approximation, and L^p shift-invariant spaces**. J. Fourier Anal. Appl., enviado 2009 (con M. J. Muñoz-Bouzo y G. Pérez-Villalón)