Muestreo en espacio invariantes por traslación: Aplicaciones (MTM2006–09737)

Antonio G. García[1]

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

El problema matemático

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

(por el teorema de Riesz)

- Planteamiento del problema
- ¿Qué debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
- La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$

El problema matemático

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

(por el teorema de Riesz)

- Planteamiento del problema

Recuperación estable de $x \in \mathcal{H}$ a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$

- ¿Qué debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
- La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$

El problema matemático

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

(por el teorema de Riesz)

- Planteamiento del problema
- ¿Qué debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
- La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$

El problema matemático

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

(por el teorema de Riesz)

- Planteamiento del problema
- ¿Qué debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
- La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$

El problema matemático

En un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define un *operador de muestreo* lineal y acotado $\mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M}: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\mathcal{M}x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

(por el teorema de Riesz)

- Planteamiento del problema
- ¿Qué debe verificar la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$?
- La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un *frame* en $\mathcal{H}$

Existen constantes $A, B > 0$ (cotas frame) tal que:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 , \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:

$$
\begin{array}{cccc}
T: & \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\
 & \{c_n\}_{n=1}^{\infty} & \longmapsto & \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n
\end{array}
$$

- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:

$$\begin{array}{rccl} T^*: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x & \longmapsto & \{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & x & \longmapsto & Sx = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n \end{array}$$

- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle S^{-1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1} x_n\rangle x_n$$

($\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el frame dual canónico)

- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:

El operador T es inyectivo: La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Riesz

- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:

El operador $\underline{T \text{ es unitario}}$: La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal

- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{H}$ se define el operador *preframe* T:
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general de manera no única) como:
- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n\rangle x_n \,, \qquad x \in \mathcal{H}$$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Funciones bandalimitada: Espacios de Paley-Wiener

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \right\} = \mathcal{F}^{-1}\left(L^2[-\pi, \pi]\right),$$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Para cada $f \in PW_\pi$,

$$f(t) = \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

$$\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{\left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

$$\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{ \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-i(n+a)w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Teorema de Shannon

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n \rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Teorema de Shannon

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Muestreo irregular

$$\{f(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{ \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-it_n w}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$\left\{ \frac{e^{-it_n w}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ base de Riesz o frame en $L^2[-\pi, \pi]$

Teoría de muestreo de Shannon

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones tal que la sucesión $\{\langle x, x_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n=1}^{\infty}$ consiste en una sucesión de muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ de la función $f \in \mathcal{H}$, función relacionada con $x \in \mathbb{H}$

Teorema de Shannon

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

PW_π como espacio invariante por traslación

$$PW_\pi = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \operatorname{senc}(t-n) \mid \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\},$$

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal

Matemáticamente, se corresponde con multiplicar el espectro de la señal por $\chi_{[-\pi,\pi]}$, lo que equivale en el dominio temporal a convolucionar con la función senc, que no se anula en el intervalo $(-\infty, 0)$. En la práctica no se puede construir de manera exacta tal filtro ya que ello implicaría conocer el futuro para calcular la salida del filtro en el momento actual (el filtro no es causal o físicamente realizable):

$$(f * \mathrm{senc})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)\, \mathrm{senc}\, x \, dx\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita

Una función bandalimitada puede extenderse a todo $\mathbb{C}$ resultando una función entera que no podrá anularse en un intervalo de $\mathbb{R}$ salvo que sea la función nula

- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal

Por ejemplo, si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(n)+\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, el error que se comete $\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{\pi(\frac{1}{2}-n)}\right|$, podría ser infinito incluso cuando $|\varepsilon_n|\leq\varepsilon$, para todo $n\in\mathbb{Z}$

- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi,\pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

Por qué espacios invariantes por traslación

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon:

- Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita
- La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\operatorname{senc} t|^2 dt = +\infty$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\text{span}}_{L^2}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,|\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}$$

(cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ)

Ejemplos

1. $\varphi = \text{senc} \quad \longrightarrow \quad V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA (Wavelets)

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\operatorname{span}}_{L^2}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,\middle|\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

(cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ)

Ejemplos

1. $\varphi = \operatorname{senc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA (Wavelets)

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\operatorname{span}}_{L^2}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,|\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}$$

(cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ)

Ejemplos

1. $\varphi = \operatorname{senc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA (Wavelets)

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\text{span}}_{L^2}\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,|\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\}$$

(cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ)

Ejemplos

1. $\varphi = \text{senc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA (Wavelets)

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Supongamos las siguientes hipótesis sobre el *generador* φ:

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Supongamos las siguientes hipótesis sobre el *generador* φ:

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Sea $\mathcal{T}_\varphi : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi$ el isomorfismo definido como

$$\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n w}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n\in\mathbb{Z}$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n w}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi i n w} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

$Z\varphi$ es la transformada de Zak de φ

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$\{f(a+n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \longleftrightarrow \left\{\left\langle F, K_a e^{-2\pi i n x}\right\rangle_{L^2(0,1)}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi\big(1/\overline{K}_a\big)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi(1/\overline{K}_a)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

Muestreo no uniforme

¿Para qué δ con $\sup_n |\delta_n| < \delta$ la sucesión $\{K_{a+\delta_n}(w)e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz obtenida perturbando $\{K_a(w)e^{-2\pi i n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$?

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores

Dados $s \geq r$ sistemas de convolución $\mathcal{L}_j$ en V_φ, i.e., $\mathcal{L}_j f = f * h_j$, , $j = 1, 2, \ldots, s$, se trata de recuperar $f \in V_\varphi$ mediante una fórmula de muestreo (estable) del tipo

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_j(t - rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

o

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn + \varepsilon_{j,n}) S_{j,n}^{\varepsilon}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
   - **A.G. García y G. Pérez-Villalón**, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 20, 422–433, 2006
   - **A.G. García y G. Pérez-Villalón**, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, 5(3), 369–387, 2007
   - **A.G. García, M.A. Hernández-Medina y G. Pérez-Villalón**, *J. Math. Anal. Appl.*, 337, 69–84, 2008
   - **A.G. García y G. Pérez-Villalón**, *J. Math. Anal. Appl.*, 355, 397–413, 2009
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet

Error cometido al aplicar la fórmula de muestreo regular válida para $V_0 = \{\sum_n a_n \varphi(t-n) \mid \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$ en el subespacio *escalado*

$$V_1 = \Big\{ \sum_n a_n \varphi(2t-n) \mid \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \Big\} \supset V_0$$

3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
    - **A.G. García, J.M. Kim, K.H. Kwon y G. Pérez-Villalón**, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 29, 126–144, 2008
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado

Estudio asintótico de la expresión:

$$E_N f(t) := \sum_{|n| \geq N} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(sn) S_j(t - sn)$$

4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
    - **A.G. García y G. Pérez-Villalón**, *Samp. Theory Signal Image Process.*, 6(1), 53–69, 2007
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto

En el caso de oversampling, i.e., $s > r$ ¿bajo qué condiciones se pueden tomar las funciones de reconstrucción S_j, $j = 1, 2, \dots, s$, de soporte compacto?

5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
   - **A.G.García, M.A.Hernández-Medina y G.Pérez-Villalón**, *J. Comp. Appl. Math.*, 2009
   - **A.G. García, M.A.Hernández-Medina y G.Pérez-Villalón**, Enviado a *Linear Algebra Appl.*, 2009
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado

Para f suficientemente *suave* (en un espacio de Sobolev) se define

$$(\Gamma f)(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{s} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_j(t-rn)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

¿bajo qué condiciones se verifica que $\|\Gamma^h f - f\|_p = \mathcal{O}(h^k)$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ (orden de aproximación) cuando $h \to 0^+$, $1 \leq p \leq \infty$, siendo $\Gamma^h := \sigma_h \Gamma \sigma_{1/h}$ y $\sigma_h f(\cdot) = f(\cdot/h)$?

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
   - **A.G. García y G. Pérez-Villalón**, *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 24, 58–69, 2008
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange

Si $f(z) = \langle K(z), x \rangle_{\mathbb{H}}$, $z \in \mathbb{C}$ $\quad (K(z)$ núcleo de Kramer analítico):

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{S_n(z)}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{P(z)}{(z - z_n)P'(z_n)}$$

Resultados más importantes

1. Muestreo generalizado, regular e irregular, multidimensional o con varios generadores
2. Error de *aliasing* en subespacios wavelet
3. Error de truncamiento en muestreo generalizado
4. Funciones de reconstrucción de soporte compacto
5. Esquemas de aproximación con muestreo generalizado
6. Muestreo analítico y fórmulas de muestreo tipo-Lagrange
    - **W.N. Everitt, A.G. García y M.A. Hernández-Medina**, *Result. Math.*, 51, 215–228, 2008