

---

**Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier:**  
**Los primeros pasos**

---

**Antonio García García**

Universidad Carlos III de Madrid

**María José Muñoz Bouzo**

UNED



# Índice general

<b>1. A modo de introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Espacios vectoriales de dimensión infinita . . . . .	5
1.2. Generalizando las normas usuales de $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}^d$ . . . . .	7
1.3. Equivalencia de normas . . . . .	9
1.4. Sucesiones de Cauchy: completitud . . . . .	11
1.5. Otras diferencias esenciales . . . . .	14
1.6. Generalizando los espacios euclídeos . . . . .	17
1.7. Lo que viene a continuación . . . . .	19
<b>2. Espacios con producto interno</b>	<b>21</b>
2.1. Producto interno, espacio prehilbertiano . . . . .	21
2.2. Propiedades geométricas . . . . .	27
2.3. Propiedades topológicas . . . . .	30
2.4. Espacios completos . . . . .	37
Ejercicios . . . . .	45
<b>3. El problema de la mejor aproximación</b>	<b>49</b>
3.1. Planteamiento del problema . . . . .	50
3.2. Proyección sobre un conjunto convexo y completo . . . . .	54
3.3. Teorema de la proyección . . . . .	57
Ejercicios . . . . .	62
<b>4. Bases ortonormales en un espacio de Hilbert</b>	<b>67</b>
4.1. Sistemas ortonormales . . . . .	67
4.2. Aproximación con un sistema ortonormal . . . . .	70
4.3. Bases ortonormales . . . . .	72
4.4. Ejemplos de bases ortonormales . . . . .	75
Ejercicios . . . . .	78

<b>5. Series de Fourier clásicas</b>	<b>83</b>
5.1. Desarrollo en serie de Fourier . . . . .	83
5.2. Desarrollo en senos y cosenos . . . . .	84
5.3. Convergencia puntual de una serie de Fourier . . . . .	88
5.4. Algunos temas complementarios . . . . .	99
5.4.1. Cálculo de los coeficientes de Fourier: La transformada discreta de Fourier . . . . .	99
5.4.2. Cálculo rápido de la transformada discreta de Fourier . . . . .	102
5.4.3. El fenómeno de Gibbs . . . . .	104
Ejercicios . . . . .	106
<b>6. Operadores lineales acotados</b>	<b>111</b>
6.1. Operadores lineales . . . . .	111
6.2. Proyecciones . . . . .	116
6.3. Representación de formas lineales continuas . . . . .	121
6.4. Operador adjunto. Operadores autoadjuntos y unitarios . . . . .	123
Ejercicios . . . . .	134
<b>7. La transformada de Fourier</b>	<b>139</b>
7.1. Operadores de convolución . . . . .	140
7.2. La transformada de Fourier . . . . .	146
7.2.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$ . . . . .	147
7.2.2. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	156
7.3. La transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	162
Ejercicios . . . . .	164
<b>8. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor</b>	<b>169</b>
8.1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor . . . . .	169
8.2. Algunos ejemplos de RKHS . . . . .	172
8.3. Espacios de Paley-Wiener . . . . .	174
Ejercicios . . . . .	180
<b>A. Sobre la Integral de Lebesgue</b>	<b>185</b>
A.1. Medidas de conjuntos y funciones medibles . . . . .	187
A.2. Integración . . . . .	194
A.3. Los espacios $L^1$ , $L^2$ y $L^\infty$ . . . . .	204
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>213</b>

# Capítulo 1

## A modo de introducción

---

En los primeros cursos de Análisis Matemático se trabaja con funciones definidas en algún subconjunto de  $\mathbb{R}$  o de  $\mathbb{R}^d$ . Los espacios  $\mathbb{R}^d$  (en general  $\mathbb{C}^d$ ) tienen estructura de espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  (sobre  $\mathbb{C}$ ) de dimensión finita  $d$ . La definición de alguna norma en ellos, frecuentemente la norma euclídea, nos permite dotarlos de una métrica. Una métrica en  $\mathbb{R}^d$  nos permite introducir el concepto de convergencia de sucesiones o, más en general, de una topología en  $\mathbb{R}^d$  mediante la cual podemos estudiar conceptos asociados a funciones como son la continuidad, diferenciabilidad, etc. Otra posibilidad consiste en considerar las funciones como elementos de un espacio vectorial determinado, dotarlo de una norma y estudiar las propiedades de la métrica asociada, de manera análoga a como se hace con los espacios  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$ . Aunque la idea generatriz es la misma, las diferencias con el caso finito dimensional dieron origen a una riqueza de resultados matemáticos que son el objetivo de una rama de las matemáticas denominada Análisis Funcional. Veamos a continuación, de manera somera, algunas de estas diferencias.

### 1.1. Espacios vectoriales de dimensión infinita

---

En Análisis Matemático se trabaja, además de con vectores en  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$ , con otros elementos como son las sucesiones o las funciones. Desde el punto de vista algebraico, tienen en común con los vectores que se les puede dotar de la estructura de espacio vectorial. Así, si denotamos por  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  el conjunto de las sucesiones de números reales, es decir,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

se prueba inmediatamente que tiene estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  si le dotamos de las operaciones:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \quad \text{y} \quad \lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}, \quad \text{donde } \{a_n\}, \{b_n\} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, el conjunto  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  de todas las sucesiones de números complejos, dotado de las mismas operaciones, forma un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

Lo que diferencia a estos espacios vectoriales de  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$  es que no están finitamente generados: no existe una base con un número finito de elementos en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  o  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Para ello bastará probar que existen conjuntos linealmente independientes con infinitos elementos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideramos la sucesión  $\mathbf{e}_n := \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ , donde  $\delta_{n,k}$  denota la **delta de Kronecker**, es decir

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

El conjunto de sucesiones  $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots\}$  es linealmente independiente en  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  o  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . En efecto, si una combinación lineal finita de elementos de  $E$  es igual a la sucesión nula  $\mathbf{0} = \{0, 0, \dots\}$ , entonces todos los coeficientes de la combinación lineal son necesariamente iguales a 0, es decir

$$\sum_{\text{finita}} \lambda_j \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \implies \lambda_j = 0 \quad \text{para todo índice } j.$$

Si  $I$  denota un intervalo cualquiera en  $\mathbb{R}$ , denotamos por  $\mathbb{R}^I$  al conjunto de todas las funciones definidas en  $I$  con valores en  $\mathbb{R}$ , es decir

$$\mathbb{R}^I := \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\}.$$

Dotado de las operaciones

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad t \in I \quad \text{y} \quad (\lambda f)(t) = \lambda f(t), \quad t \in I,$$

donde  $f, g \in \mathbb{R}^I$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el espacio  $\mathbb{R}^I$  es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales  $\mathbb{R}$ . Análogamente, el conjunto  $\mathbb{C}^I$  de todas las funciones  $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ , dotado de las mismas operaciones, forma un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ . En ambos casos, los espacios vectoriales obtenidos no son finitamente generados ya que el conjunto formado por todos los monomios  $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  (restringidos al intervalo  $I$ ) es un conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^I$  y en  $\mathbb{C}^I$ .

Se prueba, utilizando el lema de Zorn, la existencia de bases (algebraicas), llamadas **bases de Hamel**, formadas por infinitos elementos para estos espacios. Así, todo elemento se puede escribir, de manera única, como una combinación lineal finita de los elementos de la base. Recordemos el enunciado del **lema de Zorn**:

*Todo conjunto ordenado no vacío en el que todo subconjunto totalmente ordenado está acotado superiormente, contiene al menos un elemento maximal.*

**Proposición 1.1** *Todo conjunto linealmente independiente en  $\mathbb{R}^N$  (o  $\mathbb{R}^J$ ) está contenido en una base de Hamel de dicho espacio.*

**Demostración:** Sea  $L$  un conjunto linealmente independiente (infinito) en  $\mathbb{R}^N$  (o  $\mathbb{R}^J$ ). Consideramos el conjunto  $\mathcal{L}$  (no vacío) formado por todos los subconjuntos linealmente independientes que contienen a  $L$ , ordenado con la relación de inclusión. Si  $\{L_i\}$  es un conjunto totalmente ordenado en  $\mathcal{L}$ , su unión  $\bigcup_i L_i$  es una cota superior ya que es linealmente independiente (demuéstrese) y contiene a todos los  $L_i$ . Por lo tanto, el lema de Zorn nos asegura la existencia de un elemento maximal  $B$  de  $\mathcal{L}$ . Veamos que  $B$  es la base de Hamel que buscamos. Es linealmente independiente por la definición de  $\mathcal{L}$ . Además, genera cualquier elemento  $x$  del espacio; en caso contrario, el conjunto  $\{x\} \cup B$  sería linealmente independiente, y contendría a  $B$  lo que contradice la maximalidad de  $B$ . □

La prueba anterior es válida para cualquier espacio vectorial que no esté finitamente generado. Así, por ejemplo, existe una base de Hamel (infinita) del espacio vectorial de los números reales  $\mathbb{R}$  sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$  de los números racionales, aunque no se conoce explícitamente.

**Ejemplo 1.2** El conjunto formado por los monomios  $\{1, t, t^2, t^3, \dots\}$  constituye una base de Hamel (numerable) del espacio vectorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  de los polinomios de coeficientes reales sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales.

## 1.2. Generalizando las normas usuales de $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}^d$

La introducción de normas en  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$  nos permite, desde un punto de vista cuantitativo, medir distancias entre vectores y desde un punto de vista cualitativo introducir el concepto de límite. Recordemos que una **norma** en un espacio vectorial  $X$  sobre el cuerpo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , generalización del valor absoluto en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , se define como una aplicación

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

cumpliendo las siguientes propiedades:

1.  $\|x\| \geq 0$  para todo  $x \in X$  y  $\|x\| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ ,
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  para todo  $x \in X$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{C}$ ),
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  para todo  $x, y \in X$ .

Para todo  $x, y \in X$  se cumple que  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ , por lo que una norma define una función uniformemente continua en  $X$ . Una norma induce una métrica en  $X$  definida por

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad x, y \in X,$$

que es invariante por traslación, es decir, se cumple que  $d(x, y) = d(x + z, y + z)$  cualquiera que sea  $z \in X$ .

Las normas más usuales en  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$ , a saber:

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{n=1}^d |x_n|; \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^d |x_n|^2}; \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq n \leq d} |x_n|,$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$ , son generalizables a espacios de sucesiones y de funciones. Así, si  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ , podemos definir formalmente:

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{n=1}^\infty |x_n|; \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2}; \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Obviamente, las cantidades anteriores no estarán definidas para cualquier sucesión en  $\mathbb{R}^\mathbb{N}$  o  $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ . Por tanto, cada uno de los valores anteriores estará asociado a un subespacio específico de sucesiones. Si definimos

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty\},$$

se comprueba fácilmente que  $\ell^1(\mathbb{N})$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^\mathbb{N}$  y que  $\|\mathbf{x}\|_1$  para  $\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbb{N})$  define una norma. Se obtiene así un espacio normado:

**Definición 1.3** Se denomina espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  a un espacio vectorial  $X$  dotado de una norma  $\|\cdot\|$ .

De la misma manera se definen los subconjuntos de  $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ :

$$\ell^2(\mathbb{N}) := \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \text{ tal que } \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\},$$

y

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \text{ tal que } \mathbf{x} \text{ está acotada}\}.$$

Recuérdese que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  está acotada si existe una constante  $K > 0$  tal que  $|x_n| \leq K$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se prueba sin dificultad que  $\ell^\infty(\mathbb{N})$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^\mathbb{N}$  y que  $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$  constituye un espacio normado.



En el capítulo 2 se probará que  $\ell^2(\mathbb{N})$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  y que  $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$  constituye un espacio normado de un tipo particular que será objeto de estudio a lo largo de este libro (véanse los ejemplos 2.5 y 2.37).

**Ejemplo 1.4** Se comprueba que  $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$  siendo las contenciones estrictas.

Considerando, por ejemplo, el intervalo  $I = [a, b]$ , para funciones  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , las normas anteriores se generalizan definiendo formalmente:

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt; \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}; \quad \|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

Como en el caso anterior, estas cantidades no están definidas para toda función  $f \in \mathbb{C}^{[a, b]}$ . Sin embargo están definidas, por ejemplo, en el conjunto  $\mathcal{C}[a, b]$  de las funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Se prueba sin dificultad que  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_1)$  y  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$  son espacios normados. En este último caso, como el intervalo es cerrado y acotado, el teorema de Weierstrass nos permite escribir  $\|f\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$  para cada  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ . En el capítulo 2 se probará que  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$  también es un espacio normado.

### 1.3. Equivalencia de normas

Aunque las normas  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  definidas en  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$  son cuantitativamente diferentes, su comportamiento cualitativo es el mismo en el sentido de que dan origen a las mismas sucesiones convergentes. En un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  se dice que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  **converge** a un elemento  $x \in X$  si se verifica que  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . El que las sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}^d$  sean independientes de que se utilice la normas  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  o  $\|\cdot\|_\infty$  se debe a que se cumplen las siguientes relaciones entre ellas:

**Ejemplo 1.5** Las normas  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  de  $\mathbb{R}^d$  satisfacen las siguientes desigualdades (compruébese):

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq d \|x\|_\infty \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1. \end{aligned}$$

Lo anterior nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.6** Dos normas  $\|\cdot\|_a$  y  $\|\cdot\|_b$  definidas sobre un mismo espacio vectorial  $X$  son equivalentes si existen dos constantes  $0 < m \leq M$  tales que

$$m\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq M\|x\|_a \quad \text{para todo } x \in X.$$

**Proposición 1.7** Todas las normas definidas sobre  $\mathbb{R}^d$  (o  $\mathbb{C}^d$ ) son equivalentes.

**Demostración:** Sea  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una norma cualquiera en  $\mathbb{R}^d$ ; veamos que  $\rho$  es continua en  $\mathbb{R}^d$  cuando en  $\mathbb{R}^d$  consideramos la norma  $\|\cdot\|_1$ . Si  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^d$  denota la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ , para  $x = \sum_{n=1}^d x_n \mathbf{e}_n$  y  $a = \sum_{n=1}^d a_n \mathbf{e}_n$  en  $\mathbb{R}^d$  se verifica que

$$|\rho(x) - \rho(a)| \leq \rho(x - a) = \rho\left(\sum_{n=1}^d (x_n - a_n)\mathbf{e}_n\right) \leq \sum_{n=1}^d |x_n - a_n| \rho(\mathbf{e}_n) \leq K\|x - a\|_1,$$

siendo  $K = \max_{1 \leq n \leq d} \rho(\mathbf{e}_n)$ , de donde se deduce la continuidad de  $\rho$ . Como el conjunto  $S := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_1 = 1\}$  es un conjunto cerrado y acotado (compacto) en  $\mathbb{R}^d$ , la función  $\rho$ , aplicando el teorema de Weierstrass, tiene un mínimo y un máximo absolutos en  $S$ . Es decir, existen constantes  $m$  y  $M$  y puntos  $x_1, x_2 \in S$  tales que

$$m = \rho(x_1) \leq \rho(x) \leq M = \rho(x_2) \quad \text{para todo } x \in S.$$

Como  $x_1 \neq 0$ , necesariamente se cumple que  $0 < m \leq M$ . Ahora bien, si  $x \in \mathbb{R}^d$  no nulo, como  $\|x/\|x\|_1\|_1 = 1$  se tendrá que

$$m \leq \rho\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \leq M \implies m\|x\|_1 \leq \rho(x) \leq M\|x\|_1,$$

y por lo tanto, las normas  $\rho$  y  $\|x\|_1$  son equivalentes. □

En espacios normados de dimensión infinita el resultado anterior deja de ser cierto. Veámoslo mediante un ejemplo. Para  $0 < \delta < 1$  se define la función  $f_\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f_\delta(t) = \begin{cases} \frac{-t + \delta^2}{\delta^3} & \text{si } t \in [0, \delta^2], \\ 0 & \text{si } t \in (\delta^2, 1]. \end{cases}$$

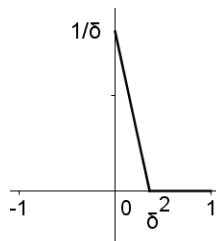


Figura 1.1: Gráfico de  $f_\delta$

Las funciones de la familia  $\{f_\delta\}_{0 < \delta < 1}$  tienen el siguiente comportamiento respecto de las normas  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_\infty$  definidas en  $\mathcal{C}[0, 1]$ :

$$\|f_\delta\|_1 = \frac{\delta}{2}; \quad \|f_\delta\|_2 = \sqrt{\int_0^{\delta^2} \left(\frac{-t + \delta^2}{\delta^3}\right)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{3}}; \quad \|f_\delta\|_\infty = \frac{1}{\delta}.$$

Por tanto, en espacios normados de dimensión infinita el concepto de convergencia está íntimamente ligado con la norma escogida en el espacio. Así, la convergencia en norma  $\|\cdot\|_1$  se denomina **convergencia en media**, la convergencia en norma  $\|\cdot\|_2$  se denomina **convergencia en media cuadrática** y la convergencia en norma  $\|\cdot\|_\infty$  coincide con la **convergencia uniforme**, en el dominio de definición de las funciones.

La no equivalencia de las normas en espacios de dimensión infinita hace también que los conjuntos acotados sean diferentes según las normas escogidas. En un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$ , un subconjunto  $A \subset X$  es **acotado** si existe una constante  $K \geq 0$  tal que  $\|x\| \leq K$  para todo  $x \in A$ .

**Ejemplo 1.8** El conjunto  $A = \left\{f \in \mathcal{C}[0, 1] : \int_0^1 |f(t)| dt \leq 1\right\}$  está acotado por 1 ( $\|f\|_1 \leq 1$ ) con respecto a la norma  $\|\cdot\|_1$ . No está acotado con respecto a la norma  $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$  ya que las funciones  $f_\delta \in A$  para  $\delta \leq 2$ , y sin embargo  $\|f_\delta\|_\infty \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

## 1.4. Sucesiones de Cauchy: completitud

El concepto de sucesión de Cauchy en un espacio normado cualquiera  $(X, \|\cdot\|)$  se define de manera análoga a como se define en  $\mathbb{R}$ . Así, decimos que una sucesión  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  en un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es una **sucesión de Cauchy** si se verifica que  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$  cuando  $n, m \rightarrow \infty$ . Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  se dice que es un **espacio completo** (o de **Banach**) si toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, dada una sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  en  $(X, \|\cdot\|)$ , existe  $x \in X$  tal que  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Los espacios finito dimensionales  $\mathbb{R}^d$  o  $\mathbb{C}^d$  son espacios completos cualquiera que sea la norma considerada.

**Proposición 1.9** *El espacio normado  $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  es completo.*

**Demostración:** Sea  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  una sucesión de Cauchy en  $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  y supongamos que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que  $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existirá  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todos  $n, m \geq n_0$  se verifica que  $\sum_{k=1}^\infty |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}| < \varepsilon$ . En particular,

para cada  $k$  fijo la sucesión de números  $\{x_k^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  será de Cauchy y por lo tanto convergente. Sea  $x_k := \lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)}$  y denotemos por  $x$  la sucesión  $x := \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Veamos que  $x \in \ell^1(\mathbb{N})$  y que la sucesión  $\{x^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x$ . Fijamos  $N \in \mathbb{N}$  y sea  $n \geq n_0$ . Se cumple que

$$\sum_{k=1}^N |x_k| \leq \sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k| + \sum_{k=1}^N |x_k^{(n)}| \leq \varepsilon + \|x^{(n)}\|_1,$$

de donde  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$  y por tanto  $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ . Además, del hecho de ser, para cada  $N \in \mathbb{N}$ , la suma  $\sum_{k=1}^N |x_k^{(n)} - x_k| \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ , se deduce que  $\|x^{(n)} - x\|_1 \leq \varepsilon$  para todo  $n \geq n_0$ . □

También se puede probar que los espacios normados  $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$  (véase el ejemplo 2.37 del capítulo 2) y  $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$  son espacios normados completos. Sin embargo, no todos los espacios normados son completos:

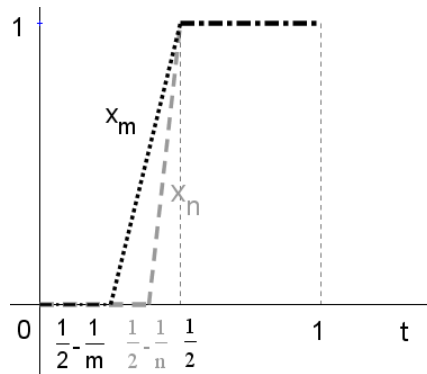


Figura 1.2: Sucesión de Cauchy no convergente en  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$

**Ejemplo 1.10** Veamos que el espacio normado  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$  no es completo. Bastará encontrar una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$  que no sea convergente. Para  $n \geq 3$  definimos la sucesión  $\{x_n\}$  de funciones continuas en  $[0, 1]$  (véase la figura 1.2):

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nt - \frac{n}{2} + 1 & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para  $n > m$  se comprueba inmediatamente que

$$\|x_n - x_m\|_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m},$$

por lo que la sucesión  $\{x_n\}$  es de Cauchy en  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$ . Supongamos que existe  $x \in \mathcal{C}[0, 1]$  tal que  $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Como

$$\|x_n - x\|_1 = \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} |x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |x_n(t) - x(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - x(t)| dt,$$

de la tercera integral se deduce que  $x(t) \equiv 1$  en  $(1/2, 1]$  y de la primera que  $x(t) \equiv 0$  en  $[0, 1/2)$ , de donde  $x \notin \mathcal{C}[0, 1]$ .

De la misma forma que el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales se completa (añadiéndole los límites de todas las sucesiones de Cauchy) para obtener el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales, un espacio completo, el espacio  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_1)$  puede ser completado. Denotaremos dicho completado como el espacio  $(L^1[0, 1], \|\cdot\|_1)$ . Este espacio se puede describir, intuitivamente, como el espacio de las funciones absolutamente integrables en el intervalo  $[0, 1]$ :

$$L^1[0, 1] := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \int_0^1 |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

El concepto de integral que se está utilizando aquí es el de Lebesgue que es más general que el de Riemann. Que  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  defina, efectivamente, una norma en  $L^1[0, 1]$  requiere ciertos detalles técnicos que aparecerán en el capítulo 2 y que se formalizarán en el apéndice.

**Ejemplo 1.11** El espacio normado  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_2)$  tampoco es completo. La misma sucesión del ejemplo anterior (véase la figura 1.2) es de Cauchy en  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_2)$  y sin embargo no es convergente (véase el ejemplo 2.35). Su espacio completado es, intuitivamente, el espacio de funciones de cuadrado integrable

$$L^2[0, 1] := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

con las mismas precisiones que en el ejemplo anterior. De hecho, se verifica que  $f \in L^2[0, 1]$  si y sólo si  $|f|^2 \in L^1[0, 1]$ .

Si consideramos en el espacio  $\mathcal{C}[0, 1]$  la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , el espacio normado resultante sí que es completo:

**Proposición 1.12** *El espacio normado  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio completo.*

**Demostración:** Sea  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$ . Dado  $\varepsilon > 0$  existirá  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\|x_n - x_m\|_{\infty} = \max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon$  para todos  $m, n \geq n_0$ . En particular, para cada  $t \in [0, 1]$ , la sucesión  $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy de números reales (o complejos), que convergerá hacia un número que denotamos por  $x(t)$ . Además, si  $m \rightarrow \infty$  se obtiene que

$$\max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

lo que implica que  $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  uniformemente en  $[0, 1]$  por lo que  $x \in \mathcal{C}[0, 1]$  y  $\|x_n - x\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . □

**Ejemplo 1.13** El espacio  $\mathcal{P}[0, 1]$  de los polinomios definidos en  $[0, 1]$ , dotado de la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ , no es un espacio completo. En efecto, sabemos que

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad \text{uniformemente en } [0, 1],$$

y, obviamente, la función exponencial  $e^t \notin \mathcal{P}[0, 1]$ .

## 1.5. Otras diferencias esenciales

En un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$ , exactamente igual a como se hace en  $\mathbb{R}^d$ , se pueden introducir los mismos conceptos topológicos: conjuntos abiertos, cerrados, compactos, etc. así como aplicaciones continuas. Por ejemplo:

- Se define la **bola abierta** de centro  $a \in X$  y radio  $r > 0$  como

$$B(a; r) := \{x \in X : \|x - a\| < r\}.$$

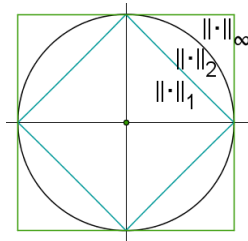


Figura 1.3:  $B(0; 1)$  en  $\mathbb{R}^2$  para  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_{\infty}$

- Se dice que un subconjunto  $U \subset X$  es un **conjunto abierto** si dado cualquier punto  $a \in U$  existe una bola abierta  $B(a; r)$  totalmente contenida en  $U$ .
- Un subconjunto  $F \subset X$  es un **conjunto cerrado** si su complementario  $X \setminus F$  es un conjunto abierto.
- Un subconjunto  $A \subset X$  es un **conjunto compacto** en  $X$  si todo recubrimiento de  $A$  formado por conjuntos abiertos admite un subrecubrimiento finito.
- Una aplicación  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  es **continua** en un punto  $a \in X$  si se verifica que: Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|x - a\| < \delta$ , entonces  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Aunque estos conceptos sean iguales para espacios de dimensión finita o infinita, existen diferencias esenciales entre ambos tipos de espacios. Sin ánimo de ser exhaustivos, veamos algunos ejemplos relevantes:

**Ejemplo 1.14** El teorema de Heine-Borel caracteriza los conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^d$ : son los conjuntos cerrados y acotados. Este resultado no es cierto en dimensión infinita. Consideremos en el espacio normado  $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  el conjunto  $A := \{x \in \ell^1(\mathbb{N}) : \|x\|_1 = 1\}$ . Este conjunto es cerrado y acotado en  $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  (pruébese); además contiene a la sucesión  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ , donde  $\mathbf{e}_n := \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ . Sin embargo no es compacto ya que el recubrimiento formado por las bolas abiertas  $\{B(x; 1/2)\}_{x \in A}$  no admite un subrecubrimiento finito. Esto es debido a que cada una de las bolas anteriores contiene a lo más un único elemento de la sucesión  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$  ya que si para  $k \neq m$  se tiene que  $\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_m \in B(x; 1/2)$ , entonces

$$2 = \|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_m\|_1 \leq \|\mathbf{e}_k - x\|_1 + \|x - \mathbf{e}_m\|_1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

lo que es una contradicción.

**Ejemplo 1.15** En conexión con el ejemplo anterior, tampoco se cumple el teorema de Bolzano-Weierstrass que dice que de toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente. La sucesión  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$  del ejemplo anterior está acotada pero, sin embargo, no puede tener ninguna sucesión convergente ya que  $\|\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_m\|_1 = 2$  para  $k \neq m$ ; ninguna subsucesión será sucesión de Cauchy y, por lo tanto, no podrá ser convergente. Nótese que toda sucesión convergente es de Cauchy.

**Ejemplo 1.16** La continuidad de una aplicación en un punto depende de la norma utilizada en el espacio. Por ejemplo, definimos la aplicación:

$$T : \begin{array}{l} \ell^1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{a} = \{a_n\} \longmapsto \sum_{n=1}^\infty a_n \end{array}$$

Nótese que esta aplicación es lineal, es decir, cumple, debido a las propiedades de las series numéricas, que  $T(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha T(\mathbf{a}) + \beta T(\mathbf{b})$  para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \ell^1(\mathbb{N})$ . Estudiemos la continuidad de  $T$  en el punto  $\mathbf{0}$  cuando dotamos a  $\ell^1(\mathbb{N})$  de la norma  $\|\cdot\|_1$ . Como  $T(\mathbf{0}) = 0$  la continuidad en  $\mathbf{0}$  significa que:

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|\mathbf{a}\|_1 \leq \delta$  entonces  $|T(\mathbf{a})| \leq \varepsilon$ .

La continuidad de  $T$  en el punto  $\mathbf{0}$  se deduce de la desigualdad

$$|T(\mathbf{a})| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \|\mathbf{a}\|_1.$$

Basta coger  $\delta = \varepsilon$ .

Sin embargo, si dotamos a  $\ell^1(\mathbb{N})$  de la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$ , la aplicación  $T$  deja de ser continua en el punto  $\mathbf{0}$ . En efecto, considerando las sucesiones

$$\mathbf{a}_N := \left\{ \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}, 0, 0, \dots \right\} \quad (N \text{ términos no nulos})$$

se tiene que

$$\|\mathbf{a}_N\|_{\infty} = \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{mientras que} \quad |T(\mathbf{a}_N)| = \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{N} \right| = 1.$$

El resultado probado sigue siendo cierto si se sustituye el punto  $\mathbf{0}$  por un punto cualquiera, ¿por qué?

En  $\mathbb{R}^d$  existe un conjunto denso (su clausura es todo  $\mathbb{R}^d$ ) y numerable. Por ejemplo, el conjunto  $A := \{(q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d : q_i \in \mathbb{Q}, 1 \leq i \leq d\}$ .

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  se dice que es un **espacio separable** si existe un subconjunto denso y numerable  $A$  en  $X$ . La densidad de  $A$  en  $X$  es equivalente a decir que, para todo  $x \in X$  y todo  $r > 0$  se verifica que  $B(x; r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Ejemplo 1.17** El espacio  $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$  es un espacio separable. Para probarlo, consideremos el siguiente conjunto de  $\ell^1(\mathbb{N})$  formado con las sucesiones  $\mathbf{e}_m = \{\delta_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$A := \{c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_n \mathbf{e}_n : n \in \mathbb{N} \text{ y } \operatorname{Re} c_k, \operatorname{Im} c_k \in \mathbb{Q} \text{ para todo } k\}.$$

El conjunto  $A$  es numerable al serlo  $\mathbb{Q}$ ; veamos que es denso en  $\ell^1(\mathbb{N})$ . Para ello, dados  $\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{N})$  y  $r > 0$  probemos que  $B(\mathbf{x}; r) \cap A \neq \emptyset$ . Como  $\mathbf{x} \in \ell^1(\mathbb{N})$  existirá  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < r/2$ ; por la densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$  existirán números complejos  $c_1, \dots, c_N$ , con partes real e imaginaria racionales, tales que  $|x_k - c_k| < r/(2N)$ . Sea  $\mathbf{y} := c_1 \mathbf{e}_1 + \dots + c_N \mathbf{e}_N \in A$ . Como

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k - c_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k| < N \frac{r}{2N} + \frac{r}{2} = r,$$



se cumple que  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}; r)$ .

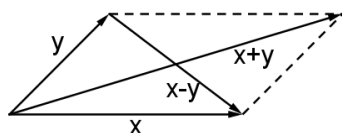
**Ejemplo 1.18** El espacio  $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$  no es un espacio separable. Supongamos que lo fuera y denotemos por  $A := \{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \dots\}$  un subconjunto denso y numerable de  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ . Consideremos por otra parte el conjunto

$$B := \{\mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^\infty(\mathbb{N}) : x_k = 0 \text{ o } 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

Sabemos que el conjunto  $B$  no es numerable. Además, como  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = 1$  para  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  en  $B$ , la bola abierta  $B(\mathbf{x}^{(n)}; 1/2)$  contiene, a lo más, un único elemento de  $B$ . Consecuentemente, existirá un  $\mathbf{x} \in B$  tal que  $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{x}^{(n)}; 1/2)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Así,  $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \dots\} \cap B(\mathbf{x}; 1/2) = \emptyset$ , y por lo tanto, el conjunto  $A$  no puede ser denso en  $\ell^\infty(\mathbb{N})$ .

## 1.6. Generalizando los espacios euclídeos

Sabemos que la norma  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2}$  en  $\mathbb{R}^d$  proviene del producto escalar (producto interno)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_dy_d$  en el sentido de que  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ . Un producto escalar permite introducir el concepto de ortogonalidad y de ángulo entre vectores, permitiendo generalizar, a estos espacios, denominados **espacios euclídeos**, muchos resultados de la geometría plana como el *teorema de Pitágoras*, la *identidad del paralelogramo* o la *proyección ortogonal*. Recuérdese que en todo paralelogramo se verifica que la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus diagonales:



$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

En particular, el concepto de base ortonormal  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_d\}$ , es decir, una base cuyos vectores verifican que  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_m = \delta_{n,m}$  (condición de ortonormalidad) y que permite escribir todo vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  mediante la expresión:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \dots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_d)\mathbf{e}_d,$$

cumpléndose por tanto que

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1)^2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2)^2 + \dots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_d)^2.$$

Lo mismo ocurre con la norma  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_d|^2}$  en  $\mathbb{C}^d$ , que proviene del producto escalar  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_d\overline{y_d}$ . Son los denominados **espacios unitarios o hermíticos**.

Lo anterior se puede generalizar a espacios infinito dimensionales, reales o complejos. Así, por ejemplo, la norma  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}$  definida en  $\ell^2(\mathbb{N})$  proviene del producto interno definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

Análogamente, la norma  $\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$  definida en  $\mathcal{C}[a, b]$  proviene del producto interno definido como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in \mathcal{C}[a, b].$$

El estudio de espacios vectoriales, infinito dimensionales, dotados de un producto interno, esto es, de los denominados *espacios prehilbertianos* es el tema de estudio en los restantes capítulos de este libro. Como todo producto interno induce, mediante la expresión  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  una norma, los espacios prehilbertianos son casos particulares de espacios normados. Así, podemos hablar de espacios prehilbertianos completos que son los denominados *espacios de Hilbert*. Como veremos en el capítulo 2, la identidad del paralelogramo caracteriza a todas las normas que provienen de un producto interno.

Una cuestión importante es la relativa a la generalización del concepto de base ortonormal. Como apuntamos anteriormente, las bases de Hamel sólo tienen una importancia teórica: en la mayoría de los casos sólo se sabe de su existencia. Sin embargo, en un espacio de Hilbert separable  $\mathcal{H}$  tiene sentido el preguntarse sobre la existencia de bases ortonormales numerables  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ , es decir, que cumplan

$$\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{n,m}, \quad \text{y} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \mathbf{e}_n \rangle \mathbf{e}_n, \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}.$$

El concepto de base ortonormal generaliza el concepto de base ortonormal en un espacio euclídeo; ahora bien, como cada vector  $x \in \mathcal{H}$  se expresa como una serie, aparece relacionado el concepto de convergencia en  $\mathcal{H}$ . Como veremos en el capítulo 4 todo espacio de Hilbert separable admite una base ortonormal numerable. El concepto de base ortonormal tiene su antecedente histórico en las series de Fourier clásicas que permiten descomponer toda función  $2\pi$  periódica  $f$ , perteneciente al espacio  $L^2[-\pi, \pi]$ , como suma de todos sus armónicos

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{donde} \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

cumpléndose que  $\|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ . Un estudio introductorio a las series de Fourier clásicas será el objetivo del capítulo 5.

## 1.7. Lo que viene a continuación

---

En este capítulo introductorio se han puesto de manifiesto algunas diferencias entre los espacios normados de dimensión finita o infinita. Así se impone la necesidad de un estudio más profundo de estas cuestiones que, como dijimos al comenzar el capítulo, corresponde a una disciplina de las matemáticas denominada Análisis Funcional. En lo que sigue a continuación, nos vamos a limitar al estudio de un caso particular, aunque muy importante, de espacios normados y a sus ejemplos más importantes.

- El capítulo 2 está dedicado al estudio de las propiedades geométricas y topológicas de los espacios normados cuya norma procede de un producto interno: son los espacios prehilbertianos. Estos espacios generalizan, en dimensión infinita, a los espacios euclídeos. Un espacio prehilbertiano que sea completo para la norma inducida recibe el nombre de espacio de Hilbert.
- En los espacios prehilbertianos se generaliza, en muchos casos, el concepto de proyección ortogonal. De esta manera podremos obtener aproximaciones, en media cuadrática, mediante elementos más fáciles de manejar. Este será el objetivo del capítulo 3.
- Como se anunciaba en la sección anterior, en los espacios de Hilbert se generaliza el concepto de base ortonormal. De hecho, se probará que todo espacio de Hilbert separable tiene una base ortonormal numerable. Desde el punto de vista de las aplicaciones, lo interesante será disponer de estas bases ortonormales de manera explícita. Al estudio de las bases ortonormales estará dedicado el capítulo 4.
- Un ejemplo muy importante de desarrollo en bases ortonormales lo constituyen los desarrollos en series de Fourier clásicas: como bases ortonormales se toman exponenciales complejas, o de manera equivalente, senos y cosenos. Un estudio sobre las propiedades más importantes de estas series se lleva a cabo en el capítulo 5.
- El capítulo 6 está dedicado al estudio de las aplicaciones lineales continuas entre espacios de Hilbert. Estos operadores serían la generalización de los operadores dados por matrices entre espacios euclídeos o unitarios. Como se ha visto en este capítulo introductorio, no toda aplicación lineal entre espacios de Hilbert es continua. El estudio de los operadores lineales continuos entre espacios de Hilbert abre un panorama completamente diferente del caso finito dimensional.

En particular, en lo que respecta al cálculo del espectro de un operador que da origen a la denominada Teoría Espectral, que no se tratará en este libro. Aquí nos limitaremos solo al estudio de los análogos de las matrices traspuestas, unitarias, de proyección, etc. que aparecen en caso finito dimensional.

- El capítulo 7 está dedicado a un estudio introductorio de ciertos operadores que constituyen una herramienta básica para muchos campos de la matemática, física o ciencia en general. Nos referimos a la transformada de Fourier y a los operadores de convolución.
- Para finalizar, el capítulo 8 está dedicado a un estudio introductorio de un tipo particular de espacios de Hilbert de funciones: los espacios de Hilbert con núcleo reproductor. Como ejemplo ilustrativo se estudian, en particular, los espacios de Paley-Wiener en los que se cumple el famoso teorema de muestreo de Shannon.

A lo largo del libro aparecen ciertos detalles técnicos, relacionados con la integración de Lebesgue, que se salvan de una manera formal. Aunque su conocimiento no es imprescindible para poder seguir la mayoría de los contenidos de este libro, se ha decidido incluir un apéndice en el que se introducen, de manera somera, los fundamentos y resultados más importantes de la integral de Lebesgue. También se comparan con los de la integral de Riemman.

## Capítulo 8

# Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

---

En este capítulo estudiaremos ciertos espacios de Hilbert de funciones para los que los funcionales evaluación son continuos. En estos espacios, denominados espacios de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS por sus siglas inglesas: reproducing kernel Hilbert spaces), las propiedades analíticas y geométricas están, como veremos, muy interrelacionadas. A lo largo de este capítulo denotaremos por  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ( $\Omega$  será generalmente un subconjunto de  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) dotado de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Para cada  $t \in \Omega$ , la aplicación

$$\begin{aligned} E_t : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto E_t(f) = f(t), \end{aligned}$$

denotará el **funcional evaluación** en  $t$ ,

### 8.1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

---

**Definición 8.1** Diremos que un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  de funciones definidas en un conjunto  $\Omega$  es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor** si todos los funcionales evaluación son acotados en  $\mathcal{H}$ . En otras palabras, para cada  $t \in \Omega$  existe una constante positiva  $M_t$  tal que  $|f(t)| \leq M_t \|f\|$ , para toda función  $f \in \mathcal{H}$ .

Para cada  $t \in \Omega$ , por el teorema de representación de Riesz 6.16 existe un único elemento  $k_t \in \mathcal{H}$  tal que  $f(t) = \langle f, k_t \rangle$  para todo  $f \in \mathcal{H}$ . Lo anterior nos lleva a la definición de núcleo reproductor en  $\mathcal{H}$ :

**Definición 8.2** La función  $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  definida mediante

$$k(t, s) := \langle k_s, k_t \rangle = k_s(t), \quad (t, s) \in \Omega \times \Omega,$$

se denomina **núcleo reproductor** de  $\mathcal{H}$ .

De la definición del núcleo reproductor  $k$  se deduce que:

- Para cada  $s \in \Omega$  fijo, la función  $k(\cdot, s) = k_s(\cdot)$  pertenece a  $\mathcal{H}$ .
- Se verifica la propiedad reproductora de  $\mathcal{H}$ :

$$f(s) = \langle f, k(\cdot, s) \rangle, \text{ para todo } f \in \mathcal{H} \text{ y } s \in \Omega. \quad (8.1)$$

**Proposición 8.3** Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert de funciones definidas en  $\Omega$  tal que existe una función  $k$  cumpliendo las dos propiedades anteriores. Entonces,  $\mathcal{H}$  es un RKHS.

**Demostración:** En efecto, basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la propiedad reproductora (8.1) para probar que cada funcional evaluación  $E_t$  es acotado.

□

**Proposición 8.4** El núcleo reproductor  $k$  de un espacio RKHS es único.

**Demostración:** Supongamos que  $k'(t, s) = k'_s(t)$  fuese otro núcleo reproductor. Para  $t, s \in \Omega$  se tendría que

$$k'_s(t) = \langle k'_s, k_t \rangle = \overline{\langle k_t, k'_s \rangle} = \overline{k_t(s)} = \langle k_s, k_t \rangle = k_s(t),$$

de donde se deduce que  $k = k'$ .

□

Si conocemos una base ortonormal  $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathcal{H}$  es fácil encontrar una expresión para  $k$ :

**Proposición 8.5** Sea  $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ . Para cada  $t, s \in \Omega$  se tiene la siguiente expresión del núcleo reproductor

$$k(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \overline{e_n(s)}.$$

**Demostración:** Desarrollando  $k_t$  y  $k_s$  en la base ortonormal  $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$  de  $\mathcal{H}$  se obtiene que  $k_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_t, e_n \rangle e_n$  y  $k_s = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_s, e_n \rangle e_n$ , de donde

$$k(t, s) = \langle k_s, k_t \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_s, e_n \rangle \overline{\langle k_t, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(s)} e_n(t).$$

□

El siguiente resultado es una propiedad importante de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor que nos relaciona la convergencia en norma con la convergencia puntual en  $\Omega$ :

**Proposición 8.6** En un espacio de Hilbert con núcleo reproductor  $\mathcal{H}$  la convergencia en norma implica convergencia puntual en  $\Omega$ , que es uniforme en subconjuntos de  $\Omega$  en donde la función  $t \mapsto k(t, t)$  esté acotada.

**Demostración:** Sea  $\{f_n\}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$  tal que  $f_n \rightarrow f$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Aplicando la propiedad reproductora (8.1) a la función  $f_n - f \in \mathcal{H}$  obtenemos que  $f_n(t) - f(t) = \langle f_n - f, k(\cdot, t) \rangle$ . Finalmente, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite escribir

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\| \|k(\cdot, t)\| = \sqrt{k(t, t)} \|f_n - f\| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además, la convergencia puntual será uniforme en subconjuntos de  $\Omega$  en donde  $\sqrt{k(t, t)}$  esté acotado.

□

Supongamos que nuestro espacio de Hilbert con núcleo reproductor  $\mathcal{H}$  es un subespacio (cerrado) de un espacio de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$  (no necesariamente con núcleo reproductor). En este caso, se cumple el siguiente resultado:

**Proposición 8.7** Si el espacio de Hilbert con núcleo reproductor  $\mathcal{H}$  es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Entonces

$$\langle f, k(\cdot, s) \rangle = P_{\mathcal{H}} f(s) \quad \text{para toda función } f \in \tilde{\mathcal{H}},$$

donde  $P_{\mathcal{H}}$  denota la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{H}$ .

**Demostración:** Dada  $f \in \tilde{\mathcal{H}}$  escribimos  $f = f_1 + f_2$  con  $f_1 \in \mathcal{H}$  y  $f_2 \in \mathcal{H}^\perp$ , de donde

$$\langle f, \overline{k(\cdot, s)} \rangle = \langle f_1 + f_2, \overline{k(\cdot, s)} \rangle = \langle f_1, \overline{k(\cdot, s)} \rangle + \langle f_2, \overline{k(\cdot, s)} \rangle = f_1(s) = P_{\mathcal{H}}f(s),$$

ya que  $f_2 \perp k(\cdot, s)$  y  $f_1 \in \mathcal{H}$ . □

Supongamos que existe una sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^\infty$  en  $\Omega$  tal que  $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$  es una base ortogonal de  $\mathcal{H}$ . Existe una fórmula en  $\mathcal{H}$  que nos permite recuperar cada función  $f \in \mathcal{H}$  a partir de la sucesión de sus muestras  $\{f(t_n)\}_{n=1}^\infty$ :

**Proposición 8.8 (Fórmula de muestreo en un RKHS)**

Supongamos que la sucesión  $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$  es base ortogonal de  $\mathcal{H}$  para cierta sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ . Entonces, para cada  $f \in \mathcal{H}$  se verifica la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{k(t, t_n)}{k(t_n, t_n)}, \quad t \in \Omega. \quad (8.2)$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos de  $\Omega$  en donde la función  $t \mapsto k(t, t)$  esté acotada.

**Demostración:** En primer lugar, normalizamos la sucesión  $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$  dividiendo cada elemento por su norma  $\|k(\cdot, t_n)\| = \sqrt{k(t_n, t_n)}$ . Dada  $f \in \mathcal{H}$ , la desarrollamos en la base ortonormal  $\left\{ \frac{k(\cdot, t_n)}{\sqrt{k(t_n, t_n)}} \right\}_{n=1}^\infty$  obteniendo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, k(\cdot, t_n)/\sqrt{k(t_n, t_n)} \rangle k(\cdot, t_n)/\sqrt{k(t_n, t_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{k(\cdot, t_n)}{k(t_n, t_n)} \quad \text{en } \mathcal{H}.$$

El resultado sobre la convergencia uniforme se obtiene de la proposición 8.6. La convergencia absoluta se deduce del hecho de que la convergencia de la serie (8.2) es incondicional: una base ortonormal lo es independientemente del orden de sus elementos (véase la nota posterior a la definición 4.12). □

## 8.2. Algunos ejemplos de RKHS

En esta sección estudiaremos tres ejemplos importantes de RKHS, ilustrando las propiedades obtenidas en la sección anterior.



**Ejemplo 8.9** El espacio  $\ell^2(\mathbb{N})$  con su producto interno estándar  
 Toda sucesión  $\mathbf{a} \in \ell^2(\mathbb{N})$  puede considerarse una función definida en  $\Omega := \mathbb{N}$ . Trivialmente, los funcionales evaluación son acotados ya que se cumple que, para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $|a_m| \leq \|\mathbf{a}\|_2$ . Por lo tanto, el espacio de sucesiones  $\ell^2(\mathbb{N})$  con su producto interno estándar es un RKHS. Sabemos que  $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$ , con  $\mathbf{e}_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^\infty$ , es una base ortonormal de  $\ell^2(\mathbb{N})$ ; su núcleo reproductor será

$$k(m, n) = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{m,n} \quad (\text{delta de Kronecker}).$$

Este ejemplo pone de manifiesto que los operadores unitarios (isometrías lineales biyectivas) no conservan la estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Nótese que el espacio de Hilbert  $L^2[0, 1]$  no es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor; ni tan siquiera tiene sentido hablar de los funcionales evaluación en él.

**Ejemplo 8.10** El espacio de Hardy en el disco unidad  
 Sea  $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  el disco unidad en el plano complejo; el espacio de Hardy en el disco  $D$  se define como las funciones analíticas en  $D$  cuyos coeficientes de Taylor alrededor de  $z = 0$  son de cuadrado sumable en  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ; es decir,

$$H^2(D) := \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ con } \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}.$$

El espacio  $H^2(D)$  es un espacio de Hilbert dotado del producto interno:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{b}_n \quad \text{donde } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Así, el operador

$$U : \ell^2(\mathbb{N}_0) \longrightarrow H^2(D) \\ \{c_n\} \longmapsto U(\{c_n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

es un operador unitario. Como  $U(\mathbf{e}_n) = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , se obtiene que la sucesión de monomios  $\{z^n : |z| < 1\}_{n=0}^\infty$  es una base ortonormal del espacio  $H^2(D)$ .

Además, el espacio  $H^2(D)$  es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor ya que, para cada  $\beta \in D$ , el funcional evaluación en  $\beta$  se escribe, para cada  $f \in H^2(D)$ , como  $f(\beta) = \langle f, k_\beta \rangle$  donde  $k_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\beta}^n z^n$ . Su núcleo reproductor, por la proposición 8.5, es

$$k(z, w) = \langle k_w, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n = \frac{1}{1 - z\bar{w}} \quad (\text{núcleo de Szegő}).$$

**Ejemplo 8.11** Los polinomios trigonométricos de grado  $\leq N$ 

El espacio de los polinomios trigonométricos de periodo  $2\pi$  y grado  $\leq N$  se define como

$$\mathcal{H}_N := \left\{ \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} : \{c_k\} \in \mathbb{C}^{2N+1} \right\}.$$

El espacio  $\mathcal{H}_N$  es un subespacio de dimensión  $2N+1$  del espacio de Hilbert  $L^2[-\pi, \pi]$ , del cual hereda su producto interno. Las funciones  $\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-N}^N$  forman una base ortonormal de  $\mathcal{H}_N$ . Como en los espacios de dimensión finita todos los operadores lineales son acotados, el espacio  $\mathcal{H}_N$  es un RKHS. Utilizando la proposición 8.5, su núcleo reproductor vendrá dado por

$$k_N(t, s) = \sum_{k=-N}^N \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iks}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ik(t-s)} = D_N(t-s),$$

donde  $D_N$  denota el núcleo de Dirichlet  $N$ -ésimo (véase la proposición 5.7).

Para cada  $f \in L^2[-\pi, \pi]$ , utilizando la proposición 8.7 se obtiene que

$$\langle f, k_N(\cdot, s) \rangle = S_N(s),$$

donde  $S_N$  denota la suma parcial  $N$ -ésima de la serie de Fourier de  $f$  respecto de la base ortonormal  $\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$  de  $L^2[-\pi, \pi]$ .

Veamos ahora cómo se obtiene, utilizando la proposición 8.8, una fórmula interpolatoria para los polinomios trigonométricos ya conocida por Cauchy en 1841. En este caso, necesitamos una sucesión de puntos  $\{t_n\}_{n=-N}^N$  en  $[-\pi, \pi]$  tal que

$$\langle k_N(\cdot, t_n), k_N(\cdot, t_m) \rangle = k_N(t_m, t_n) \delta_{n,m}.$$

Observando la expresión de  $k_N(t, s)$  que nos da la proposición 5.8, bastaría escoger los puntos  $t_n = \frac{2\pi n}{2N+1}$ ,  $-N \leq n \leq N$ , para los que  $k_N(t_m, t_n) = \frac{1}{2\pi}(2N+1)\delta_{m,n}$ . Finalmente, la fórmula de muestreo (8.2), permite escribir cada polinomio trigonométrico  $p \in \mathcal{H}_N$  como

$$p(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N p\left(\frac{2\pi n}{2N+1}\right) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(\frac{2N+1}{2}\right)\left(t - \frac{2\pi n}{2N+1}\right)\right]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\left(t - \frac{2\pi n}{2N+1}\right)}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

### 8.3. Espacios de Paley-Wiener

---

Un ejemplo de espacio RKHS de especial relevancia está constituido por las funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  bandalimitadas a un cierto intervalo centrado en el origen  $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$ . Decimos que una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$  es **bandalimitada** (o **de banda limitada**) al intervalo  $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$  si su transformada de Fourier  $\hat{f}$  se anula fuera de dicho intervalo (en lo que sigue, notaremos la transformada de Fourier de  $f \in L^2(\mathbb{R})$  como  $\hat{f}$  o  $\mathcal{F}f$  indistintamente). Estas funciones, básicas en teoría de la señal, modelizan señales de energía finita que no contienen frecuencias más allá de la frecuencia  $\pi\sigma$ . A lo largo de la sección estudiaremos que  $\sigma = 1$ .

En la literatura matemática, el espacio de funciones bandalimitada al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , reciben el nombre de **espacio de Paley-Wiener**  $PW_\pi$ . Es decir

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \equiv 0 \text{ fuera de } [-\pi, \pi] \right\}.$$

El espacio  $PW_\pi$  es un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$  ya que  $PW_\pi = \mathcal{F}^{-1}(L^2[-\pi, \pi])$ , en donde se ha identificado el espacio  $L^2[-\pi, \pi]$  con el subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$  que resulta de extender a todo  $\mathbb{R}$ , por 0, las funciones de  $L^2[-\pi, \pi]$ , y la transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  es un operador unitario en  $L^2(\mathbb{R})$ .

Dada  $f \in PW_\pi$ , utilizando la transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  se obtiene la representación:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{iwt} dw = \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.3)$$

de donde, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la igualdad de Parseval  $\|f\| = \|\hat{f}\|$ , se obtiene, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , que

$$|f(t)| \leq \|\hat{f}\| \left\| \frac{e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right\| = \|f\|, \quad f \in PW_\pi.$$

Por tanto, el espacio  $PW_\pi$  es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Su núcleo reproductor es  $k_\pi(t, s) = \frac{\text{sen } \pi(t-s)}{\pi(t-s)}$  ya que por el teorema de Plancherel-Parseval 7.34 se tiene que

$$f(s) = \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-iws}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \left\langle f, \frac{\text{sen } \pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle, \quad s \in \mathbb{R},$$

donde hemos utilizado que

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{e^{-iws}}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(w) \right)(t) = \frac{\text{sen } \pi(t-s)}{\pi(t-s)}.$$

Como la sucesión  $\left\{ \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  es una base ortonormal de  $L^2[-\pi, \pi]$  y  $\mathcal{F}^{-1}$  un operador unitario, deducimos que:

**Corolario 8.12** La sucesión  $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , de los trasladados en los enteros de la función seno cardinal, es una base ortonormal del espacio de Paley-Wiener  $PW_{\pi}$ .

Teniendo en cuenta que  $k_{\pi}(t, t) = 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , la proposición 8.8 nos proporciona, en este caso, el famoso teorema de muestreo de Shannon:

**Teorema 8.13 (Teorema de muestreo de Shannon)**

Toda función  $f \in PW_{\pi}$ , i.e., bandalimitada al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , puede recuperarse a partir de la sucesión de sus muestras  $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$  mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (8.4)$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en  $\mathbb{R}$ .

Otra demostración de teorema anterior, es la siguiente: dada una función  $f \in PW_{\pi}$ , desarrollamos su transformada de Fourier  $\hat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$  con respecto a la base ortonormal  $\left\{ \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  de  $L^2[-\pi, \pi]$  obteniendo:

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi].$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1}$  y teniendo en cuenta que  $PW_{\pi}$  es un RKHS, de la proposición 8.6 se obtiene de nuevo la fórmula de muestreo de Shannon.

La fórmula de muestreo de Shannon es un desarrollo ortonormal en el espacio  $PW_{\pi}$  con respecto a la base  $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ . La identidad de Parseval correspondiente al desarrollo (8.4) nos dice que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2, \quad f \in PW_{\pi},$$

es decir, toda la energía  $E_f := \|f\|^2$  de la señal bandalimitada  $f \in PW_{\pi}$  está contenida en la sucesión de sus muestras  $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ .

La aplicación de la proposición 8.5 en este caso proporciona la siguiente igualdad para el núcleo reproductor de  $PW_{\pi}$

**Corolario 8.14** *Se tiene que*

$$\frac{\operatorname{sen} \pi(t-s)}{\pi(t-s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \frac{\operatorname{sen} \pi(s-n)}{\pi(s-n)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Como  $PW_\pi$  es un RKHS contenido en  $L^2(\mathbb{R})$ , la proposición 8.7 aporta una expresión para la proyección ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$  sobre  $PW_\pi$ :

**Corolario 8.15** *Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene que*

$$P_{PW_\pi} f(s) = \left\langle f, \frac{\operatorname{sen} \pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle = (f * \operatorname{senc})(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Finalizamos el capítulo con algunos comentarios y generalizaciones sobre el teorema de muestreo de Shannon:

- Lo importante del teorema de muestreo anterior es que las muestras están equiespaciadas, con un periodo de muestreo  $T_s = 1$ , y no que éstas se tomen precisamente en los enteros. De hecho, toda función  $f \in PW_\pi$  se puede recuperar a partir de la sucesión de sus muestras  $\{f(n+a)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , donde  $a \in \mathbb{R}$  es un número fijo, mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Basta observar que la sucesión  $\left\{ e^{-i(n+a)\omega} / \sqrt{2\pi} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  también es base ortonormal de  $L^2[-\pi, \pi]$ ; mediante el operador unitario  $\mathcal{F}^{-1}$  se transforma en la base ortonormal  $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$  de  $PW_\pi$ .

- La fórmula de muestreo de Shannon es una fórmula interpolatoria tipo-Lagrange, ya que generaliza, al caso infinito, la conocida fórmula de interpolación polinómica de Lagrange. En efecto, desarrollando  $\operatorname{sen} \pi(t-n)$  se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n \operatorname{sen} \pi t}{\pi(t-n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{P(t)}{P'(n)(t-n)}, \end{aligned}$$

siendo  $P(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi}$ .

- A partir del resultado del teorema 8.13 es fácil deducir la fórmula de muestreo correspondiente a funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  bandalimitadas a un intervalo  $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$ , es decir, del espacio de Paley-Wiener  $PW_{\pi\sigma}$ . Sea  $f \in PW_{\pi\sigma}$ , definimos la función  $g(t) := f(t/\sigma)$ . Como  $\hat{g}(w) = \sigma \hat{f}(\sigma w)$ , la función  $g \in PW_{\pi}$ , de donde

$$g(t) = f(t/\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El cambio de variable  $t/\sigma = s$  proporciona la fórmula de muestreo válida para  $f \in PW_{\pi\sigma}$ :

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\text{sen } \pi(\sigma s - n)}{\pi(\sigma s - n)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Nótese que en el espacio  $PW_{\pi\sigma}$  el periodo de muestreo es  $T_s = 1/\sigma$ .

- El hecho de tomar el intervalo de frecuencias  $[-\pi, \pi]$  simétrico respecto al origen se debe a que es lo que les ocurre a las señales bandalimitada que toman valores reales. En efecto, si  $f$  es una función que toma valores reales, se cumple que  $\overline{\hat{f}(w)} = \hat{f}(-w)$ , de donde resulta que  $|\hat{f}(w)|^2 = \hat{f}(w)\overline{\hat{f}(w)} = \hat{f}(w)\hat{f}(-w)$  es una función par.
- A partir del teorema 8.13 es fácil deducir la fórmula de muestreo válida para funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  bandalimitada a un intervalo  $[w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ . En efecto, si  $f$  es una función de este tipo, la función  $g(t) := e^{-iw_0 t} f(t)$  es bandalimitada al intervalo  $[-\pi, \pi]$  ya que  $\hat{g}(w) = \hat{f}(w + w_0)$ , de donde

$$g(t) = e^{-iw_0 t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iw_0 n} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

resultando, finalmente, la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Toda función  $f \in PW_{\pi}$  puede extenderse al plano complejo mediante la expresión:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{izw} dw, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Procediendo como en el ejemplo 7.36, se prueba que  $f$  es una función entera, es decir, holomorfa en todo  $\mathbb{C}$ . Además, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  se tiene que

$$|f(x + iy)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(w)| e^{-yw} dw \leq \frac{e^{\pi|y|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{f}(w)| dw \leq e^{\pi|z|} \|f\|.$$

Existe un resultado, debido a Paley y Wiener, que nos dice que estas propiedades junto con el hecho de pertenecer  $f$  a  $L^2(\mathbb{R})$  caracterizan totalmente al espacio  $PW_\pi$ . Es decir,

$$PW_\pi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f(z)| \leq Ae^{\pi|z|}, \quad f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

La metodología empleada se puede seguir para obtener fórmulas de muestreo válidas para funciones definidas mediante una expresión del tipo (8.3); lo importante es escoger una base ortonormal apropiada que nos dé la sucesión de muestras de la función. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 8.16** Consideremos el conjunto de funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas mediante la expresión:

$$f(t) := \int_0^\pi F(x) \operatorname{sen} tx \, dx = \langle F, \operatorname{sen} tx \rangle_{L^2[0, \pi]}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $F$  recorre el espacio de Hilbert  $L^2[0, \pi]$ . Teniendo en cuenta que la sucesión  $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} nx \right\}_{n=1}^\infty$  es base ortonormal de  $L^2[0, \pi]$  (véase el ejemplo 4.20), para cada  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrollamos la función  $\operatorname{sen} tx \in L^2[0, \pi]$  respecto a esta base obteniendo

$$\operatorname{sen} tx = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \langle \operatorname{sen} tx, \operatorname{sen} nx \rangle \operatorname{sen} nx = \sum_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^n n \operatorname{sen} \pi t}{\pi(t^2 - n^2)} \operatorname{sen} nx$$

en  $L^2[0, \pi]$ . Introduciendo este desarrollo en la expresión de  $f$  y usando la continuidad del producto interno se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle F, \operatorname{sen} tx \rangle = \left\langle F, \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \langle \operatorname{sen} tx, \operatorname{sen} nx \rangle \operatorname{sen} nx \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{2(-1)^n n \operatorname{sen} \pi t}{\pi(t^2 - n^2)} \langle F, \operatorname{sen} nx \rangle = \sum_{n=1}^\infty f(n) \frac{2(-1)^n n \operatorname{sen} \pi t}{\pi(t^2 - n^2)}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## Ejercicios propuestos

---

1. Sean  $f, g$  dos funciones en  $PW_\pi$ . Demuestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(n).$$

2. Demuestre que toda función  $f \in PW_\pi$  es indefinidamente derivable y que todas sus derivadas están en  $PW_\pi$ . En particular, pruebe que  $\|f'\| \leq \pi\|f\|$  para toda  $f \in PW_\pi$ .
3. El objetivo de este problema es obtener una fórmula de muestreo válida para las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma:

$$f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-i(t^2+x^2-xt)} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $F \in L^2[-\pi, \pi]$  (funciones bandalimitada en el sentido de la **transformada de Fourier fraccionaria**).

- a) Para  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrolle la función  $e^{i(t^2+x^2-xt)}$  en  $L^2[-\pi, \pi]$  respecto de la base ortonormal dada por

$$\left\{ \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} e^{ix^2} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

- b) ¿Qué teorema de muestreo se deduce del apartado anterior?

4. Se considera el espacio de Hilbert producto  $\mathcal{H} = L^2[0, \pi] \times L^2[0, \pi]$  dotado del producto interno

$$\langle (F_1, F_2), (G_1, G_2) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle F_1, G_1 \rangle_{L^2[0, \pi]} + \langle F_2, G_2 \rangle_{L^2[0, \pi]}.$$

- a) Para  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrolle la función  $(\cos tx, \sin tx) \in \mathcal{H}$  respecto de la base ortonormal  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\cos nx, \sin nx) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

- b) Escriba el teorema de muestreo que se obtiene para funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma:

$$f(t) = \int_0^{\pi} \{F_1(x) \cos tx + F_2(x) \sin tx\} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $F_1$  y  $F_2$  pertenecen a  $L^2[0, \pi]$ .



5. El objetivo de este problema es obtener un teorema de muestreo para funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma:

$$f(t) = \int_0^\pi F(x) \cos tx \, dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde la función  $F \in L^2[0, \pi]$ . Para ello:

- a) Para cada  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrolle la función  $\cos tx \in L^2[0, \pi]$  con respecto a la base ortonormal  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}_{n=1}^\infty$  de  $L^2[0, \pi]$ .
- b) Teniendo en cuenta el desarrollo anterior, obtenga el teorema de muestreo buscado.
6. Demuestre que, para cada  $f \in PW_\pi$ , la fórmula de muestreo de Shannon se puede escribir como

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi} \left\{ \frac{f(0)}{t} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left( \frac{f(n)}{t-n} + \frac{f(-n)}{t+n} \right) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Escriba la fórmula anterior para los casos en que la función  $f$  sea una función par o impar en  $PW_\pi$ .

7. Demuestre que la proyección ortogonal de  $L^2(\mathbb{R})$  sobre  $PW_\pi$  se puede calcular también como

$$P_{PW_\pi} f = \mathcal{F}^{-1}(\chi_{[-\pi, \pi]}(w) \mathcal{F}(w)).$$

8. Pruebe que una función  $f \in PW_\pi$  si y sólo si admite la representación integral

$$f(t) = \int_0^\pi F(x) \{ \cos tx + \operatorname{sen} tx \} dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde  $F$  es una función en  $L^2[0, \pi]$ . Es decir, la función  $f$  es bandalimitada al intervalo  $[-\pi, \pi]$  en el sentido de la transformada de Fourier si y sólo si es bandalimitada al intervalo  $[0, \pi]$  en el sentido de la **transformada de Hartley** cuyo núcleo integral está dado por la función  $\operatorname{cas} tx := \cos tx + \operatorname{sen} tx$  (cosine and sine).

*Ayuda:* utilice la fórmula de Euler,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ .

9. Dada una función  $f \in PW_\pi$ , su transformada de Hilbert  $\tilde{f}$  viene dada por la expresión:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^\pi (-i \operatorname{sgn} w) \hat{f}(w) e^{itw} dw = \left\langle \hat{f}, \frac{i \operatorname{sgn} w}{\sqrt{2\pi}} e^{-itw} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- a) Para cada  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrolle la función  $\frac{i \operatorname{sgn} w}{\sqrt{2\pi}} e^{-itw}$  en la base ortonormal  $\left\{ \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2[-\pi, \pi]$ .

*Nota:* Utiliza el hecho de que:

$$\mathcal{F}\left[\frac{i \operatorname{sgn} t}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(t)\right](w) = \operatorname{senc} \frac{w}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi w}{2}.$$

- b) Aplicando la identidad de Parseval pruebe que:

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(t-n)]^4}{[\frac{\pi}{2}(t-n)]^2} \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

- c) Obtenga la suma la serie numérica:  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-2n)^2}$ .
- d) Teniendo en cuenta el desarrollo del primer apartado, deduzca la siguiente fórmula de muestreo para  $\tilde{f}$ :

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \operatorname{senc} \frac{(t-n)}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi(t-n)}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- e) Compare el resultado con el del problema 17 del capítulo 7.

10. Dada la función seno cardinal,  $g(t) = \operatorname{sen} \pi t / \pi t$ , se trata de probar que la sucesión doble  $\{e^{2\pi imt} g(t-n)\}_{n, m \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$ . Para ello se sugiere seguir los siguientes pasos:

- a) Demuestre que la transformada de Fourier de la función  $e^{2\pi imt} g(t-n)$  es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inw} \chi_{[2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi]}(w).$$

- b) Demuestre que es un sistema ortonormal utilizando la identidad de Parseval en  $L^2(\mathbb{R})$ .
- c) Escriba cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  como la suma ortogonal (convergente en  $L^2(\mathbb{R})$ )

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}),$$

donde cada  $f_m$  cumple que:  $\hat{f}_m = \hat{f} \chi_{[2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi]}$ .

- d) Pruebe que la función  $e^{-2\pi imt} f_m(t)$  es bandalimitada a  $[-\pi, \pi]$ . Aplicando el teorema de muestreo de Shannon a esta función, obtenga que

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi imn} f_m(n) e^{2\pi imt} \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)}.$$

- e) Deduzca finalmente el resultado buscado.

11. Sea  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable y sea  $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$  una aplicación valorada en  $\mathcal{H}$ . Supongamos que existe una sucesión  $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$  en  $\mathbb{R}$  tal que la correspondiente sucesión  $\{K(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$  forma una base ortogonal para  $\mathcal{H}$ .

- a) Se define el conjunto de funciones

$$\mathcal{H}_K := \{f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f_x(t) = \langle x, K(t) \rangle_{\mathcal{H}} \text{ con } x \in \mathcal{H}\}$$

Demuestre que la aplicación  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_K$  definida como  $T(x) = f_x$  es lineal y biyectiva.

- b) El espacio  $\mathcal{H}_K$  dotado del producto interno  $\langle f_x, f_y \rangle_{\mathcal{H}_K} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$  es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Calcule su núcleo reproductor.
- c) Para  $t \in \mathbb{R}$  fijo, desarrolle el elemento  $K(t) \in \mathcal{H}$  respecto de la base ortogonal anterior. Escriba el teorema de muestreo que satisfacen las funciones  $f \in \mathcal{H}_K$ .

12. El objetivo de este problema es obtener una fórmula de muestreo para toda función real  $f \in L^2(\mathbb{R})$  cuya transformada de Fourier  $\hat{f}$  se anula fuera del conjunto  $[-w_0 - \pi, -w_0] \cup [w_0, w_0 + \pi]$  (**funciones pasobanda**), utilizando las sucesiones de muestras  $\{f(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de la propia  $f$  y  $\{\tilde{f}(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  de su transformada de Hilbert  $\tilde{f}$ . Para ello se sugiere seguir los siguientes pasos:

- a) La señal analítica  $f_a$  asociada a  $f$  (véase el capítulo 7) será bandalimitada al intervalo  $[w_0, w_0 + \pi]$ . Obtenga la fórmula de muestreo que verifica  $f_a$ .
- b) Como  $f = \operatorname{Re} f_a$ , deduzca la fórmula de muestreo que se obtiene para  $f$ .

En particular, deduzca una fórmula de muestreo para  $f \in PW_{\pi}$  real, que involucre las sucesiones de muestras  $\{f(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $\{\tilde{f}(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .