Un viaje matemático a través del teorema de Shannon

A. G. García[1]

[1]Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid

El Teorema de muestreo de Shannon

Cualquier función f del espacio de Paley-Wiener:

$$PW_\pi := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi]\}$$

(bandalimitada a $[-\pi, \pi]$) puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

La serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

El Teorema de muestreo de Shannon

Cualquier función f del espacio de Paley-Wiener:

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad \text{supp}\, \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi] \right\}$$

(bandalimitada a $[-\pi, \pi]$) puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

La serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

- $PW_\pi = \mathcal{F}^{-1}\big(L^2[-\pi, \pi]\big)$ es un espacio de Hilbert contenido en $L^2(\mathbb{R})$.

El Teorema de muestreo de Shannon

Cualquier función f del espacio de Paley-Wiener:

$$PW_\pi := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}), \quad \text{supp}\, \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi]\}$$

(bandalimitada a $[-\pi, \pi]$) puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

La serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

- Para $f \in PW_\pi$ se verifica

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

Una prueba elegante (Hardy)

- Desarrollamos $\widehat{f}$ en la base ortonormal $\{e^{-inw}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$:

$$\widehat{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \widehat{f}, \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]} \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Aplicando la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\right)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathrm{sinc}(t-n)$$

Una prueba elegante (Hardy)

- Desarrollamos $\widehat{f}$ en la base ortonormal $\{e^{-inw}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi,\pi]$:

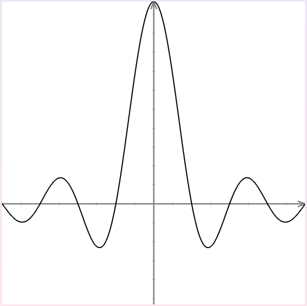
$$\widehat{f}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\widehat{f},\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Aplicando la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$:

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\Big)(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\,\mathrm{sinc}(t-n)$$

Una prueba elegante (Hardy)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,\mathrm{sinc}(t-n)$$



Seno cardinal

$$\mathrm{sinc}\, t := \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

$$||$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi,\pi]}\right)(t)$$

Una prueba elegante. Convergencia

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

- $|f(t)| \leq \|\widehat{f}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \|f\|_{PW_\pi}$, luego convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia puntual
- Convergencia incondicional de una serie de Fourier implica convergencia absoluta
- Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una prueba elegante. Convergencia

- $|f(t)| \leq \|\widehat{f}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \|f\|_{PW_\pi}$, luego convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia puntual
- Convergencia incondicional de una serie de Fourier implica convergencia absoluta
- Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una prueba elegante. Convergencia

- $|f(t)| \leq \|\widehat{f}\|_{L^2[-\pi,\pi]} = \|f\|_{PW_\pi}$, luego convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia puntual
- Convergencia incondicional de una serie de Fourier implica convergencia absoluta
- Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$

Una prueba elegante. Convergencia

- Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Las evaluaciones puntuales $E_t(f) := f(t)$ son funcionales lineales continuos en PW_π

$$\Downarrow$$

PW_π es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS)

Una prueba elegante. Convergencia

- Convergencia uniforme en $\mathbb{R}$.

Las evaluaciones puntuales $E_t(f) := f(t)$ son funcionales lineales continuos en PW_π

$\Downarrow$

PW_π es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS)

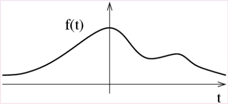
Para cada $s \in \mathbb{R}$ y $f \in PW_\pi$

$$f(s) = \langle f, \mathrm{sinc}(\cdot - s)\rangle_{PW\pi}$$

$k_\pi(t,s) := \mathrm{sinc}(t-s)$ es el núcleo reproductor de PW_π

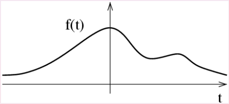
Interpretación de la Dualidad de Fourier

$$f \in PW_\pi$$

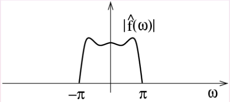


Interpretación de la Dualidad de Fourier

$$f \in PW_\pi \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$$

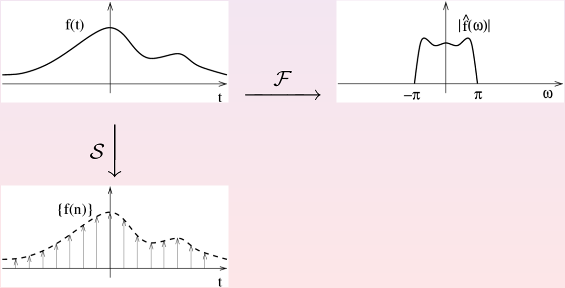


$\xrightarrow{\mathcal{F}}$



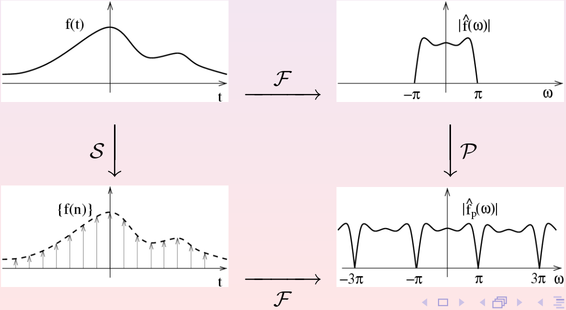
Interpretación de la Dualidad de Fourier

$$\begin{tikzcd} f \in PW_\pi \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathcal{S}"'] & \widehat{f} \in L^2[-\pi,\pi] \\ \{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) & \end{tikzcd}$$



Interpretación de la Dualidad de Fourier

$$\begin{tikzcd}
f \in PW_\pi \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[d, "\mathcal{S}"'] & \widehat{f} \in L^2[-\pi,\pi] \arrow[d, "\mathcal{P}"] \\
\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & \widehat{f}_p \in L^2_p[-\pi,\pi]
\end{tikzcd}$$



Undersampling y Oversampling

Dado un periodo de muestreo $T_s > 0$ consideramos las muestras $\{f(nT_s)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $f \in PW_\pi$. Consideramos la versión $\frac{2\pi}{T_s}$-periodizada de $\widehat{f}$

$$\widehat{f}_p(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\big(\omega + \frac{2\pi}{T_s} n\big)$$

Undersampling y Oversampling

$$\widehat{f_p}(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s} n\right)$$

La desarrollamos con respecto la base ortonormal $\left\{\sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} e^{-imT_s w}\right\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de $L^2[0, 2\pi/T_s]$

Fórmula sumatoria de Poisson

$$\widehat{f_p}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s} n\right) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_s) \frac{e^{-imT_s\omega}}{\sqrt{2\pi}}$$

Undersampling y Oversampling

$$\widehat{f}_p(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s} n\right)$$

Fórmula sumatoria de Poisson

$$\widehat{f}_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s} n\right) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_s) \frac{e^{-imT_s\omega}}{\sqrt{2\pi}}$$

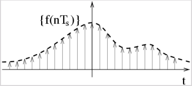
Consecuencia

Muestrear una señal con periodo T_s equivale a periodizar su espectro con periodo $2\pi/T_s$

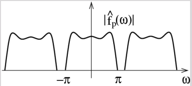
Undersampling y Oversampling

Primer caso: $0 < T_s \leq 1$

Oversampling



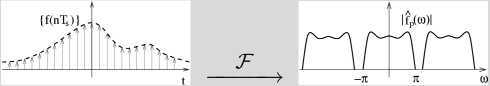
$\xrightarrow{\mathcal{F}}$



Undersampling y Oversampling

Primer caso: $0 < T_s \leq 1$

Oversampling

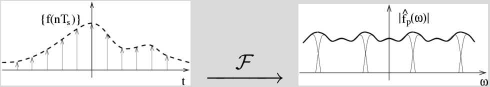


- Ventaja del Oversampling

Undersampling y Oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

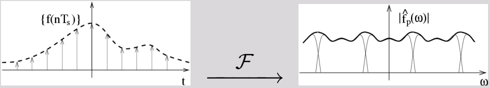
Undersampling



Undersampling y Oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

Undersampling

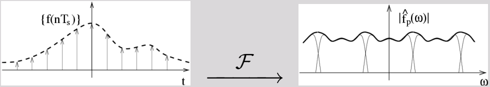


- Frecuencia Nyquist
- Fenómeno de *aliasing*

Undersampling y Oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

Undersampling



- Frecuencia Nyquist
- Fenómeno de *aliasing*

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{iw_0(t-n)}\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- Nota Histórica
  - Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
  - E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de series cardinales
  - C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
  - V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- Soporte de $\widehat{f}$ simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$$

- Si supp $\widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

Comentarios por el camino

- En PW_π, el periodo de muestreo Nyquist es

$$T_s = \frac{2\pi}{\text{long}([-\pi, \pi])} = 1$$

- Toda función $f \in PW_\pi$ se recupera a partir de sus muestras $\{f(n+\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cualquiera que sea el $\alpha \in \mathbb{R}$. Desarrollando $\widehat{f}$ respecto a la base ortonormal $\left\{e^{-i(n+\alpha)w}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ se obtiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+\alpha)\,\text{sinc}(t-n-\alpha)$$

Comentarios por el camino

- En PW_π, el periodo de muestreo Nyquist es

$$T_s = \frac{2\pi}{\text{long}([-\pi, \pi])} = 1$$

- Toda función $f \in PW_\pi$ se recupera a partir de sus muestras $\{f(n+\alpha)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cualquiera que sea el $\alpha \in \mathbb{R}$. Desarrollando $\widehat{f}$ respecto a la base ortonormal $\left\{e^{-i(n+\alpha)w}/\sqrt{2\pi}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y aplicando $\mathcal{F}^{-1}$ se obtiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+\alpha)\,\text{sinc}(t-n-\alpha)$$

Comentarios por el camino

- La fórmula $\langle f, \operatorname{sinc}(\cdot - t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ da la proyección ortogonal de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sobre PW_π
- Fórmula interpolatoria tipo-Lagrange:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \operatorname{sinc}(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{P(t)}{(t-n)P'(n)}$$

donde $P(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi}$

Comentarios por el camino

- La fórmula $\langle f, \operatorname{sinc}(\cdot - t)\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ da la proyección ortogonal de $f \in L^2(\mathbb{R})$ sobre PW_π
- Fórmula interpolatoria tipo-Lagrange:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\operatorname{sinc}(t-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{P(t)}{(t-n)P'(n)}$$

donde $P(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi}$

Comentarios por el camino

- En el espacio de Paley-Wiener general $PW_{\pi\sigma}$ en donde $\operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq L^2[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, se verifica que $T_s = \frac{2\pi}{2\pi\sigma} = \frac{1}{\sigma}$. Para $f \in PW_{\pi\sigma}$ se verifica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\sin \pi(\sigma t - n)}{\pi(\sigma t - n)}$$

El núcleo reproductor es: $k_{\pi\sigma} = \sigma \operatorname{sinc} \sigma(t - s)$

Comentarios por el camino

- Regularidad de $\widehat{f} \implies$ decaimiento más rápido de f en ∞. $\operatorname{sinc}(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ cuando $|t| \to +\infty$ debido a las discontinuidades de $\chi_{[-\pi,\pi]}$
- Problemas numéricos: Si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de las muestras $\{f(n) + \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el error cometido es:

$$\left|\sum_n \frac{(-1)^n \delta_n}{\pi(n - \frac{1}{2})}\right|$$

  Podría valer infinito aunque $|\delta_n| \leq \delta$
- Solución: Técnica de oversampling

Comentarios por el camino

- Regularidad de $\widehat{f} \implies$ decaimiento más rápido de f en ∞. $\operatorname{sinc}(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ cuando $|t| \to +\infty$ debido a las discontinuidades de $\chi_{[-\pi,\pi]}$
- Problemas numéricos: Si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de las muestras $\{f(n) + \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el error cometido es:

$$\left|\sum_n \frac{(-1)^n \delta_n}{\pi(n - \frac{1}{2})}\right|$$

Podría valer infinito aunque $|\delta_n| \leq \delta$
- Solución: Técnica de oversampling

Comentarios por el camino

- Regularidad de $\widehat{f} \implies$ decaimiento más rápido de f en ∞. $\operatorname{sinc}(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ cuando $|t| \to +\infty$ debido a las discontinuidades de $\chi_{[-\pi,\pi]}$
- Problemas numéricos: Si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de las muestras $\{f(n) + \delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el error cometido es:

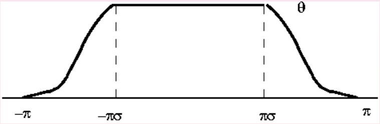
$$\left| \sum_n \frac{(-1)^n \delta_n}{\pi(n - \frac{1}{2})} \right|$$

  Podría valer infinito aunque $|\delta_n| \leq \delta$
- Solución: Técnica de oversampling

Comentarios por el camino

- Técnica de oversampling
  Supongamos supp $\widehat{f} \subseteq [-\pi\sigma, \pi\sigma] \subset [-\pi, \pi]$ donde $\sigma < 1$
  Sea θ una función suficientemente regular tal que

$$\theta(w) := \begin{cases} 1 & w \in [-\pi\sigma, \pi\sigma] \\ 0 & w \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$



Comentarios por el camino

- Técnica de oversampling
  Supongamos supp $\widehat{f} \subseteq [-\pi\sigma, \pi\sigma] \subset [-\pi, \pi]$ donde $\sigma < 1$
  Sea θ una función suficientemente regular tal que

$$\theta(w) := \begin{cases} 1 & w \in [-\pi\sigma, \pi\sigma] \\ 0 & w \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Entonces

$$\widehat{f}(w) = \sum_n f(n)\theta(w)\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi]$$

$$\Downarrow$$

$$f(t) = \sum_n f(n)S(t-n) \quad \text{en } PW_\pi$$

donde $S(t-n) = \mathcal{F}^{-1}[\theta(w)e^{-inw}/\sqrt{2\pi}](t)$

Comentarios por el camino

- PW_π como un RKHS de funciones enteras:
  $f \in PW_\pi$ se extiende a $\mathbb{C}$ como:

  $$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{izw}\, dw\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

  Aplicando Cauchy-Schwarz:

  $$|f(z)| \le \|f\| e^{\pi|z|}\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

  Teorema clásico de Paley-Wiener:

  $$PW_\pi = \{f \in H(\mathbb{C})\,;\, |f(z)| \le Ae^{\pi|z|}\,;\, f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Comentarios por el camino

- Transformada de Fourier en sentido distribucional.
  - Sea $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ con supp $T \subset (-\pi, \pi)$.
  - Si $\widehat{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supp $\widehat{\theta} \subset (-\pi, \pi)$ y $\widehat{\theta} \equiv 1$ en un abierto conteniendo a supp T

Teorema de Campbell

Sea $f = \mathcal{F}^{-1}T$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\theta(z-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\big[\operatorname{sinc}(\cdot - n) * \theta\big](z),\ z \in \mathbb{C}$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$

Comentarios por el camino

- Transformada de Fourier en sentido distribucional.
  - Sea $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ con supp $T \subset (-\pi, \pi)$.
  - Si $\widehat{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con supp $\widehat{\theta} \subset (-\pi, \pi)$ y $\widehat{\theta} \equiv 1$ en un abierto conteniendo a supp T

Teorema de Campbell

Sea $f = \mathcal{F}^{-1} T$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\theta(z-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\big[\operatorname{sinc}(\cdot - n) * \theta\big](z),\ z \in \mathbb{C}$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C}$

Comentarios por el camino

- Validez de la fórmula de muestreo en otros espacios funcionales:
  1. Clases de Paley-Wiener PW_σ^p
  2. Espacios de Bernstein B_σ^p
- Etc.

Comentarios por el camino

- Validez de la fórmula de muestreo en otros espacios funcionales:
  1. Clases de Paley-Wiener PW_σ^p
  2. Espacios de Bernstein B_σ^p
- Etc.

Comentarios por el camino

- Validez de la fórmula de muestreo en otros espacios funcionales:
  1. Clases de Paley-Wiener PW_σ^p
  2. Espacios de Bernstein B_σ^p
- Etc.

Comentarios por el camino

- Validez de la fórmula de muestreo en otros espacios funcionales:
  1. Clases de Paley-Wiener PW_σ^p
  2. Espacios de Bernstein B_σ^p
- Etc.

Estudio de errores

- Error de truncamiento Para $f \in PW_\pi$ se verifica

$$\left| f(t) - \sum_{n=-N}^{N} f(n) \operatorname{sinc}(t-n) \right|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |f(n)|^2$$

- Error de amplitud
- Error Time-jitter
- Error por pérdida de información
- Error de Aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- Error de amplitud

$$\{f(n) + \varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

- Error Time-jitter
- Error por pérdida de información
- Error de Aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- Error de amplitud
- Error Time-jitter

$$\{f(n+\delta_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

- Error por pérdida de información
- Error de Aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- Error de amplitud
- Error Time-jitter
- Error por pérdida de información

$$\{\theta_n f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ donde } 0 \leq \theta_n \leq 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}.$$

- Error de Aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- Error de amplitud
- Error Time-jitter
- Error por pérdida de información
- Error de Aliasing
  Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

$$\left| f(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\,\mathrm{sinc}(t-n) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|w|>\pi} |\widehat{f}(w)|\,dw$$

Muestreo multidimensional

$$f(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(x,y)e^{itx}e^{isy}\,dxdy$$

entonces

$$f(t,s) = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} f(n,m)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}\frac{\sin\pi(s-m)}{\pi(s-m)}$$

Muestreo multidimensional

$$f(t,s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(x,y)e^{itx}e^{isy}\,dxdy$$

entonces

$$f(t,s)=\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} f(n,m)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}\frac{\sin\pi(s-m)}{\pi(s-m)}$$

En general, si $\operatorname{supp}\widehat{f}\subseteq B$ con $B\subset\mathbb{R}^n$ acotado, la *reconstrucción eficiente* de f depende de la geometría del conjunto B

Recuperación estable

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

- $\{e^{-it_n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ completo en $L^2[-\pi,\pi]$ implica que la sucesión $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ caracteriza $f \in PW_\pi$

Recuperación estable

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

- $\{e^{-it_n w}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ completo en $L^2[-\pi,\pi]$ implica que la sucesión $\{f(t_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ caracteriza $f \in PW_\pi$

Muestreo estable en $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\|f\|_{PW_\pi} \leq K \|\{f(t_n)\}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

Recuperación estable

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$$

Muestreo estable en $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\|f\|_{PW_\pi} \leq K \|\{f(t_n)\}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

- Bases ortonormales: Identidad de Parseval
- Bases de Riesz
- Frames

Recuperación estable. Bases de Riesz

Una base de Riesz $\{x_n\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es la imagen de una base ortonormal $\{e_n\}$ mediante un operador $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ acotado e invertible

Existe $\{y_n\}$ base de Riesz biortonormal (i.e., $\langle x_n, y_m \rangle = \delta_{n,m}$) tal que para todo $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_n \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

Recuperación estable. Bases de Riesz

Una base de Riesz $\{x_n\}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es la imagen de una base ortonormal $\{e_n\}$ mediante un operador $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ acotado e invertible

Existe $\{y_n\}$ base de Riesz biortonormal (i.e., $\langle x_n, y_m \rangle = \delta_{n,m}$) tal que para todo $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_n \langle x, y_n \rangle x_n = \sum_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

Recuperación estable. Frames

Una sucesión $\{x_n\}$ es un frame en $\mathcal{H}$ si existen constantes $0 < A \leq B$ tal que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{H}$$

Se mantiene la representación $x = \sum_n c_n x_n$ en $\mathcal{H}$ aunque no es única.

Desde el punto de vista práctico, $x \in \mathcal{H}$ se recupera a partir de $Sx = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ mediante un algoritmo iterativo

Algoritmo frame

Recuperación estable. Frames

Una sucesión $\{x_n\}$ es un frame en $\mathcal{H}$ si existen constantes $0 < A \leq B$ tal que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{H}$$

Se mantiene la representación $x = \sum_n c_n x_n$ en $\mathcal{H}$ aunque no es única.

Desde el punto de vista práctico, $x \in \mathcal{H}$ se recupera a partir de $Sx = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ mediante un algoritmo iterativo

Algoritmo frame

Recuperación estable. Frames

Una sucesión $\{x_n\}$ es un frame en $\mathcal{H}$ si existen constantes $0 < A \leq B$ tal que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_n |\langle x, x_n\rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{H}$$

Se mantiene la representación $x = \sum_n c_n x_n$ en $\mathcal{H}$ aunque no es única.

Desde el punto de vista práctico, $x \in \mathcal{H}$ se recupera a partir de $Sx = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n$ mediante un algoritmo iterativo

Algoritmo frame

Recuperación estable. Frames

Muestreo estable en PW_π en los puntos de muestreo $\{t_n\}$ equivale a encontrar bases de Riesz, frames $\{e^{-it_n w}\}$ en $L^2[-\pi, \pi]$

Muestreo irregular

Condición 1/4 de Kadec

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - n| < \frac{1}{4} \Rightarrow \{e^{-it_n w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es una base de Riesz de } L^2[-\pi,\pi]$$

Teorema de Perturbación

Sea $\{e_n\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\{f_n\}$ sucesión de $\mathcal{H}$. Supongamos existe $\lambda \in [0,1)$ tal que

$$\|\sum_n c_n(e_n - f_n)\| \leq \lambda \sqrt{\sum_n |c_n|^2}$$

para toda sucesión $\{c_n\}$ finita. Entonces, $\{f_n\}$ es base de Riesz de $\mathcal{H}$

Muestreo irregular

Condición 1/4 de Kadec

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |t_n - n| < \frac{1}{4} \Rightarrow \{e^{-it_n w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}} \text{ es una base de Riesz de } L^2[-\pi,\pi]$$

Teorema de Perturbación

Sea $\{e_n\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\{f_n\}$ sucesión de $\mathcal{H}$. Supongamos existe $\lambda \in [0,1)$ tal que

$$\left\|\sum_n c_n(e_n - f_n)\right\| \leq \lambda \sqrt{\sum_n |c_n|^2}$$

para toda sucesión $\{c_n\}$ finita. Entonces, $\{f_n\}$ es base de Riesz de $\mathcal{H}$

Muestreo irregular

Sea $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ la base biortonormal de $\{e^{-it_n w}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$

$$\widehat{f}(w) = \sum_n f(t_n)h_n(w) \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi]$$

Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(t) = \sum_n f(t_n)\mathcal{F}^{-1}(h_n)(t) \quad \text{en } PW_\pi$$

Muestreo irregular

$$f(t) = \sum_n f(t_n)\mathcal{F}^{-1}(h_n)(t) \quad \text{en } PW_\pi$$

Teorema de Paley-Wiener-Levinson

Para toda $f \in PW_\pi$ se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n)\frac{G(t)}{(t-t_n)G'(t_n)}$$

donde

$$G(t) := (t - t_0)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{t_{-n}}\right)\left(1-\frac{t}{t_n}\right)$$

Muestreo con derivadas

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw \quad f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) iwe^{iwt} dw$$

Un par de bases de Riesz duales en $L^2[-\pi, \pi]$ apropiadas para el muestreo con derivadas son:

$$\left\{x_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{|w|}{\pi}\right) e^{-2inw}\right\}_{n\in\mathbb{Z}} \cup \left\{y_n = \frac{i \operatorname{sgn} w}{\pi\sqrt{\pi}} e^{-2inw}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

y

$$\left\{x_n^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2inw}\right\} \cup \left\{y_n^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} iwe^{-2inw}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

Muestreo con derivadas

Desarrollando $\widehat{f}$ según la base $\{x_n\} \cup \{y_n\}$

$$\widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sqrt{2} f(2n) x_n - \sqrt{2} f'(2n) y_n\right]$$

Aplicando $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[f(2n) + (t-2n) f'(2n)\right] \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t-2n}{2}\right)$$

Muestreo con la transformada de Hilbert

Transformada de Hilbert

Dada $f \in PW_\pi$, su transformada de Hilbert está definida por

$$\widetilde{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (-i \operatorname{sgn} w)\widehat{f}(w) e^{iwt} dw$$

La sucesión $\{i \operatorname{sgn} w e^{-inw}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2[-\pi,\pi]$. Desarrollando $\widehat{f}$ en dicha base y aplicando $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(n) \operatorname{sinc} \frac{1}{2}(t-n) \sin \frac{\pi}{2}(t-n)$$

Muestreo con la transformada de Hilbert

Transformada de Hilbert

Dada $f \in PW_\pi$, su transformada de Hilbert está definida por

$$\widetilde{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (-i \operatorname{sgn} w) \widehat{f}(w) e^{iwt} dw$$

La sucesión $\{i \operatorname{sgn} w e^{-inw} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$. Desarrollando $\widehat{f}$ en dicha base y aplicando $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(t) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{f}(n) \operatorname{sinc} \frac{1}{2}(t-n) \sin \frac{\pi}{2}(t-n)$$

Muestreo con la transformada de Hilbert

Señal analítica asociada a una señal real $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f_a := f + i\widetilde{f} \implies \widehat{f_a} = \widehat{f} + i(-i\,\mathrm{sgn})\widehat{f} = 2\widehat{f}\,u$$

i.e., supp $\widehat{f_a} \subseteq [0, +\infty)$ (u es la función de Heaviside)

Muestreo con la transformada de Hilbert

Muestreo señales pasobanda

Supongamos f real con supp $\widehat{f} \subseteq [-w_0 - \pi, -w_0] \cup [w_0, w_0 + \pi]$
Entonces

$$f_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{w_0}^{w_0+\pi} 2\widehat{f}(w) e^{iwt} dw$$

$$\Downarrow$$

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a(2n) e^{iw_1(t-2n)} \frac{\sin \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}$$

donde $w_1 = w_0 + \frac{\pi}{2}$.

Muestreo con la transformada de Hilbert

Muestreo señales pasobanda

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a(2n) e^{iw_1(t-2n)} \frac{\sin \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}$$

Como $f = \Re f_a$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ f(2n) \cos w_1(t-2n) - \widetilde{f}(2n) \sin w_1(t-2n) \right\} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(t-2n)}{\frac{\pi}{2}(t-2n)}$$

Teorema de muestro de Kramer

- Sea $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert separable y Ω subconjunto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- Dada una función $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}$, para $x \in \mathbb{H}$ se define la función:

$$f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} \ \left(f(t) := \langle K(t), x \rangle_{\mathbb{H}} \right) \quad t \in \Omega$$

- Al espacio vectorial $\mathcal{H}_K$ de todas las funciones definidas de esta forma se le dota de estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Teorema de muestro de Kramer

- Sea $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert separable y Ω subconjunto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- Dada una función $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}$, para $x \in \mathbb{H}$ se define la función:

$$f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} \ \big(f(t) := \langle K(t), x \rangle_{\mathbb{H}} \big) \quad t \in \Omega$$

- Al espacio vectorial $\mathcal{H}_K$ de todas las funciones definidas de esta forma se le dota de estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Teorema de muestreo de Kramer

- Sea $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert separable y Ω subconjunto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- Dada una función $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{H}$, para $x \in \mathbb{H}$ se define la función:

$$f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} \ \left(f(t) := \langle K(t), x \rangle_{\mathbb{H}} \right) \quad t \in \Omega$$

- Al espacio vectorial $\mathcal{H}_K$ de todas las funciones definidas de esta forma se le dota de estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t)\rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

$\mathcal{H}_K$ es un RKHS

- $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \text{ínf}\{\|x\| \ : \ Tx = f\}$ donde

$$T : x \in \mathbb{H} \longrightarrow f \in \mathcal{H}_K$$

- El núcleo reproductor viene dado por

$$k(t,s) = \langle K(s), K(t)\rangle_{\mathbb{H}} \quad (k(t,s) = \langle K(t), K(s)\rangle_{\mathbb{H}})$$

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t)\rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

1. Estudio de la regularidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$
2. Muestreo en $\mathcal{H}_K$: **Teorema de Kramer**
3. Muestreo utilizando otro tipo de muestras
4. ¿Cuándo se escribirá la serie muestral como una serie interpolatoria tipo Lagrange?

$$f(t) = \sum_n f(t_n) S_n(t) = \sum_n f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n) P'(t_n)}$$

donde P tiene ceros simples en $\{t_n\}$

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

1. Estudio de la regularidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$
2. Muestreo en $\mathcal{H}_K$: **Teorema de Kramer**
3. Muestreo utilizando otro tipo de muestras
4. ¿Cuándo se escribirá la serie muestral como una serie interpolatoria tipo Lagrange?

$$f(t) = \sum_n f(t_n) S_n(t) = \sum_n f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n) P'(t_n)}$$

donde P tiene ceros simples en $\{t_n\}$

Teorema de muestro de Kramer

Teorema de Kramer

Supongamos existe $\{t_n\}$ en Ω tal que $\{K(t_n)\}$ es base ortogonal de $\mathbb{H}$. Entonces,

$$f(t)=\sum_n f(t_n)S_n(t)\,,\quad t\in\Omega$$

donde

$$S_n(t)=\frac{\langle K(t_n),K(t)\rangle_{\mathbb{H}}}{\|K(t_n)\|^2}$$

La serie converge absolutamente en cada punto de Ω y uniformemente en subconjuntos de Ω donde $\|K(t)\|$ esté acotada

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t)\rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

1. Estudio de la regularidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$
2. Muestreo en $\mathcal{H}_K$: **Teorema de Kramer**
3. Muestreo utilizando otro tipo de muestras
4. ¿Cuándo se escribirá la serie muestral como una serie interpolatoria tipo Lagrange?

$$f(t) = \sum_n f(t_n) S_n(t) = \sum_n f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n)P'(t_n)}$$

donde P tiene ceros simples en $\{t_n\}$

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

1. Estudio de la regularidad de las funciones en $\mathcal{H}_K$
2. Muestreo en $\mathcal{H}_K$: **Teorema de Kramer**
3. Muestreo utilizando otro tipo de muestras
4. ¿Cuándo se escribirá la serie muestral como una serie interpolatoria tipo Lagrange?

$$f(t) = \sum_n f(t_n) S_n(t) = \sum_n f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n) P'(t_n)}$$

donde P tiene ceros simples en $\{t_n\}$

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t)\rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

5. ¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Una manera de obtener los núcleos K ha consistido en considerar problemas diferenciales y en diferencias, de manera que la sucesión $\{t_n\}$ sea la de los autovalores del problema y $\{K(t_n)\}$ la sucesión de las correspondientes autofunciones.

6. Tipología conocida del espacio $\mathcal{H}_K$. Por ejemplo, ¿cuándo $\mathcal{H}_K$ será un espacio de De Branges de funciones enteras?

Teorema de muestro de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t)\rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

5. ¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Ejemplo: Volviendo al Teorema de Shannon

$$\begin{cases} -iy' = ty\,; & x \in [-\pi, \pi] \\ y(-\pi) = y(\pi) \end{cases}$$

$$[K(t)](x) = e^{itx}\,; \quad t_n = n \in \mathbb{Z}$$

6. Tipología conocida del espacio $\mathcal{H}_K$. Por ejemplo, ¿cuándo $\mathcal{H}_K$ será un espacio de De Branges de funciones enteras?

Teorema de muestreo de Kramer

$$\mathcal{H}_K = \{f(t) := \langle x, K(t) \rangle_{\mathbb{H}} : x \in \mathbb{H},\ t \in \Omega\}$$

5. ¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?
6. Tipología conocida del espacio $\mathcal{H}_K$. Por ejemplo, ¿cuándo $\mathcal{H}_K$ será un espacio de De Branges de funciones enteras?

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\text{span}}\{\varphi(t-n) \,:\, n \in \mathbb{Z}\} = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \,:\, \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$$

cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ

Ejemplos

1. $\varphi = \text{sinc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\operatorname{span}}\{\varphi(t-n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$$

cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ

Ejemplos

1. $\varphi = \operatorname{sinc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\text{span}}\{\varphi(t-n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$$

cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ

Ejemplos

1. $\varphi = \text{sinc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Definición

Dada $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ se define

$$V_\varphi := \overline{\operatorname{span}}\{\varphi(t-n) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) : \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\}$$

cuando $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea al menos un frame para V_φ

Ejemplos

1. $\varphi = \operatorname{sinc} \implies V_\varphi = PW_\pi$
2. $\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m-1$, i.e., $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$
3. φ es la función escala de un MRA

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Supongamos las siguientes hipótesis sobre el *generador* φ:

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Supongamos las siguientes hipótesis sobre el *generador* φ:

- La sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ
- φ es continua en $\mathbb{R}$
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en $\mathbb{R}$

Sea $T : L^2(0,1) \longrightarrow V_\varphi$ el isomorfismo definido como

$$T(e^{-2\pi i n w}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$T(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = T^{-1}f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)} e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$T(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- Para cada $f \in V_\varphi$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = T^{-1}f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t-n)}e^{-2\pi inw} = \overline{Z\varphi(t,w)}$$

$Z\varphi$ es la transformada de Zak de φ

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$T(e^{-2\pi inw}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- $$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}, \quad K_t(w) = \overline{Z\varphi(t,w)}$$
- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi imw} K_t(w)$
- $T\left[e^{-2\pi imw} F(w)\right] = f(t-m)$ si $f = T(F)$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

$$T(e^{-2\pi i n w}) := \varphi(t-n) \text{ para cada } n \in \mathbb{Z}$$

Entonces:

- $$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}\,, \quad K_t(w) = \overline{Z\varphi(t,w)}$$
- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi i m w} K_t(w)$
- $T\left[e^{-2\pi i m w} F(w)\right] = f(t-m)$ si $f = T(F)$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = \mathcal{T}\big(1/\overline{K_a}\big)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = T\big(1/\overline{K_a}\big)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

1. Muestreo no uniforme: $\{f(a+n+\delta_n)\}$

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = T\big(1/\overline{K_a}\big)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

1. Muestreo no uniforme: $\{f(a+n+\delta_n)\}$
   ¿Para qué $\{\delta_n\}$ con $\sup_n |\delta_n| < \delta$ la sucesión $\{K_{a+\delta_n}(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz obtenida perturbando $\{K_a(w)e^{-2\pi inw}\}_{n\in\mathbb{Z}}$?

Teoría de muestreo en espacios invariantes por traslación

Teorema de muestreo en V_φ

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n)\,, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = \mathcal{T}\big(1/\overline{K_a}\big)$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en $\mathbb{R}$

1. Muestreo no uniforme: $\{f(a+n+\delta_n)\}$
2. Muestreo utilizando muestras de versiones filtradas de f