CEDYA 2011

Recuperación de Splines a partir de Medias Locales

Gerardo Pérez Villalón

Departamento de Matemáticas de la EUIT de Telecomunicación de la UPM

Trabajo conjunto con Alberto Portal Ruiz

Splines Cardinales

Sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \ : \ f|_{[k,k+1)} \in \Pi_d, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Splines Cardinales

Sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \,:\, f|_{[k,k+1)} \in \Pi_d,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es impar, y sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \,:\, f|_{[k-1/2,k+1/2)} \in \Pi_d,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es par.

Splines Cardinales

Sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \ : \ f|_{[k,k+1)} \in \Pi_d, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es impar, y sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \ : \ f|_{[k-1/2,k+1/2)} \in \Pi_d, \ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es par.

Sea β_d el B-spline cardinal central de grado d,

$$\beta_d := \mathcal{X}_{[-1/2,1/2]} * \ldots * \mathcal{X}_{[-1/2,1/2]} \quad (d+1 \text{ términos})$$

Splines Cardinales

Sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \,:\, f|_{[k,k+1)} \in \Pi_d,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es impar, y sea

$$\mathcal{S}_d := \{f(t) \in C^{d-1} \,:\, f|_{[k-1/2,k+1/2)} \in \Pi_d,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

cuando d es par.

Sea β_d el B-spline cardinal central de grado d,

$$\beta_d := \mathcal{X}_{[-1/2,1/2]} * \ldots * \mathcal{X}_{[-1/2,1/2]} \quad (d+1 \text{ términos})$$

Cualquier spline $f \in \mathcal{S}_d$ se puede expresar en la forma

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\, \beta_d(t-n)$$

para apropiados coeficientes a_n.

Interpolación con Splines Cardinales

Consideremos el problema de interpolación:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_d$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Interpolación con Splines Cardinales

Consideremos el problema de interpolación:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_d$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para $d = 1$ el problema tiene una única solución. Para $d > 1$ tiene infinitas soluciones formando un espacio afín de dimensión $d - 1$ cuando d es impar y de dimensión d cuando d es par.

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \left\{ f(t) \in \mathcal{S}_d \ : \ f(t) = O(|t|^{\gamma}) \ \text{cuando} \ t \mapsto \pm\infty \right\},$$
$$D_{\gamma} := \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ y_n = O(|n|^{\gamma}) \ \text{cuando} \ n \mapsto \pm\infty \right\},$$

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \left\{ f(t) \in \mathcal{S}_d \ : \ f(t) = O(|t|^\gamma) \text{ cuando } t \mapsto \pm\infty \right\},$$
$$D_\gamma := \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ y_n = O(|n|^\gamma) \text{ cuando } n \mapsto \pm\infty \right\},$$

Teorema (Schoenberg) El problema de interpolación:

Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \left\{ f(t) \in \mathcal{S}_d \ : \ f(t) = O(|t|^\gamma) \ \text{cuando} \ t \mapsto \pm\infty \right\},$$
$$D_\gamma := \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ y_n = O(|n|^\gamma) \ \text{cuando} \ n \mapsto \pm\infty \right\},$$

Teorema (Schoenberg) El problema de interpolación:

Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, L_d(t-n)$$

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \{f(t) \in \mathcal{S}_d \ : \ f(t) = O(|t|^\gamma) \text{ cuando } t \mapsto \pm\infty\},$$
$$D_\gamma := \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ y_n = O(|n|^\gamma) \text{ cuando } n \mapsto \pm\infty\},$$

Teorema (Schoenberg) El problema de interpolación:

Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, L_d(t-n)$$

donde $L_d(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \beta_d(t-n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_d\,(n)\ z^{-n}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, z^{-n}, \quad |z| = 1.$

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \left\{ f(t) \in \mathcal{S}_d \, : \, f(t) = O(|t|^\gamma) \text{ cuando } t \mapsto \pm\infty \right\},$$
$$D_\gamma := \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \, : \, y_n = O(|n|^\gamma) \text{ cuando } n \mapsto \pm\infty \right\},$$

Teorema (Schoenberg) El problema de interpolación:

Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, L_d(t-n)$$

donde $L_d(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \beta_d(t-n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_d \, (n) \; z^{-n} \right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, z^{-n}, \quad |z| = 1.$
La serie converge uniformemente en intervalos finitos.

Para $\gamma \geq 0$ definimos:

$$\mathcal{S}_{d,\gamma} := \left\{ f(t) \in \mathcal{S}_d \; : \; f(t) = O(|t|^\gamma) \text{ cuando } t \mapsto \pm\infty \right\},$$
$$D_\gamma := \left\{ \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \; : \; y_n = O(|n|^\gamma) \text{ cuando } n \mapsto \pm\infty \right\},$$

Teorema (Schoenberg) El problema de interpolación:

Dada una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n L_d(t-n)$$

donde $L_d(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \beta_d(t-n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \beta_d(n) z^{-n}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^{-n}, \quad |z| = 1.$

La serie converge uniformemente en intervalos finitos.

Existe una constante $\mu_d \in (0,1)$ tal que $L_d(t) = O(\mu_d^{|t|})$.

Muestreo con medias ponderadas

En ocasiones, las muestras disponibles son medias ponderadas de la función,

$$y_n = h * y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(n-t)h(t)dt$$

donde $h(t)$ es una función que modeliza el mecanismo de medida.

Muestreo con medias ponderadas

En ocasiones, las muestras disponibles son medias ponderadas de la función,

$$y_n = h * y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} y(n-t)h(t)dt$$

donde $h(t)$ es una función que modeliza el mecanismo de medida. Suponemos que $h(t)$ verifica

- supp $h \subseteq [-1/2, 1/2], \quad h(t) \geq 0,\ t \in \mathbb{R}$
- $0 < \int_{-1/2}^{0} h(t)dt < \infty$ y $0 < \int_{0}^{1/2} h(t)dt < \infty$

El problema

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_d$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

El problema

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_d$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene infinitas soluciones formando un espacio afín de dimensión $d+1$ cuando d es impar, y de dimensión d cuando d es par.

Teorema. En los casos lineal, cuadrático, cúbico y cuártico ($d = 1, 2, 3, 4$), el problema:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución

Teorema. En los casos lineal, cuadrático, cúbico y cuártico $(d = 1, 2, 3, 4)$, el problema:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, L_{h,d}(t - n)$$

donde $L_{h,d}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \beta_d(t - n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h * \beta_d \,(n) \; z^{-n} \right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, z^{-n}, \quad |z| = 1.$

Teorema. En los casos lineal, cuadrático, cúbico y cuártico ($d = 1, 2, 3, 4$), el problema:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, L_{h,d}(t-n)$$

donde $L_{h,d}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \beta_d(t-n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h * \beta_d\,(n) \; z^{-n} \right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, z^{-n}, \quad |z| = 1.$
La serie converge uniformemente en intervalos finitos.

Teorema. En los casos lineal, cuadrático, cúbico y cuártico ($d = 1, 2, 3, 4$), el problema:

Dada una sucesión de números reales $\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in D_\gamma$, encontrar un spline $f \in \mathcal{S}_{d,\gamma}$ tal que

$$f * h(n) = y_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

tiene una única solución , dada por

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, L_{h,d}(t-n)$$

donde $L_{h,d}(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \beta_d(t-n)$ siendo c_n los coeficientes en el desarrollo $\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} h * \beta_d\,(n)\; z^{-n}\right)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, z^{-n}, \quad |z| = 1.$
La serie converge uniformemente en intervalos finitos.
Existe una constante $\mu_{h,d} \in (0,1)$ tal que $L_d(t) = O(\mu_{h,d}^{|t|})$.

Conjetura: El resultado anterior se válido para cualquier grado d.

Conjetura: El resultado anterior se válido para cualquier grado d.

Se tiene:

- Si $y_n \in \ell^p$ entonces $f \in L^p$, para $1 \leq p \leq \infty$

Conjetura: El resultado anterior se válido para cualquier grado d.

Se tiene:

- Si $y_n \in \ell^p$ entonces $f \in L^p$, para $1 \leq p \leq \infty$
- El spline $f(t)$ se puede expresar como

$$a_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k c_{n-k}$$
$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \beta_d(t-n)$$

siendo c_n los coeficientes en el desarrollo

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} h * \beta_d(n) \, z^{-n} \right)^{-1} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n}, \quad |z| = 1.$$