

Teoría matemática de muestreo de señales

Antonio García García

Departamento de Matemáticas
Universidad Carlos III de Madrid



Universidad de Valladolid

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid, 16 septiembre 2011

Contenidos

- 1 La teoría clásica de Shannon
 - El teorema de Shannon: propiedades
 - Comentarios, generalizaciones, etc.
- 2 Recuperación estable: frames en un espacio de Hilbert separable
 - Guía básica de frames
 - Muestreo irregular en PW_π
 - Muestreo con derivadas
- 3 Muestreo en espacios invariantes por traslación
 - Inconvenientes de la teoría de Shannon
 - Teoría de muestreo en V_φ^2

Contenidos

- 1 La teoría clásica de Shannon
 - El teorema de Shannon: propiedades
 - Comentarios, generalizaciones, etc.
- 2 Recuperación estable: frames en un espacio de Hilbert separable
 - Guía básica de frames
 - Muestreo irregular en PW_π
 - Muestreo con derivadas
- 3 Muestreo en espacios invariantes por traslación
 - Inconvenientes de la teoría de Shannon
 - Teoría de muestreo en V_φ^2

Claude E. Shannon (1916–2001)



- B. S. Engineering Mathematics, University of Michigan, 1936
Ph. D. Mathematics, MIT, 1940
- Research Mathematician, Bell Labs, 1941–1972; MIT Faculty Member, 1956–1978; Donner Professor of Science 1958
- Major publication: **A Mathematical Theory of Communication**, Bell System Technical Report, 1948
- Honorary Degree, Univ. of Michigan, 1961; The National Medal of Science, 1966; The Audio Engineering Society Gold Medal, 1985; The Kyoto Prize, 1985

*... the american mathematician, computer scientist, communication engineer, and the founder of the field of **Information Theory**, whose work has laid the foundation for the telecommunication networks that lace the globe*

El Teorema de muestreo de Shannon

THEOREM 1: *If a function $f(t)$ contains no frequencies higher than W cps, it is completely determined by giving its ordinates at a series of points spaced $1/2W$ seconds apart.*

Cualquier función f del espacio de Paley-Wiener:

$$PW_{\pi} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]\}$$

es decir, **bandalimitada** a $[-\pi, \pi]$, puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La serie converge en $L^2(\mathbb{R})$, y también, absoluta y uniformemente en \mathbb{R} .

El Teorema de muestreo de Shannon

THEOREM 1: *If a function $f(t)$ contains no frequencies higher than W cps, it is completely determined by giving its ordinates at a series of points spaced $1/2W$ seconds apart.*

Cualquier función f del **espacio de Paley-Wiener**:

$$PW_{\pi} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}), \quad \text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi, \pi]\}$$

es decir, **bandalimitada** a $[-\pi, \pi]$, puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

La serie converge en $L^2(\mathbb{R})$, y también, absoluta y uniformemente en \mathbb{R} .

Sobre el espacio PW_π

- $PW_\pi = \mathcal{F}^{-1}(L^2[-\pi, \pi])$ es un espacio de Hilbert contenido en $L^2(\mathbb{R})$.
- Para $f \in PW_\pi$ se verifica

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f(t)| \leq \|\widehat{f}\|_{L^2[-\pi, \pi]} = \|f\|_{PW_\pi}$$

Convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ implica convergencia puntual, que es uniforme en \mathbb{R}

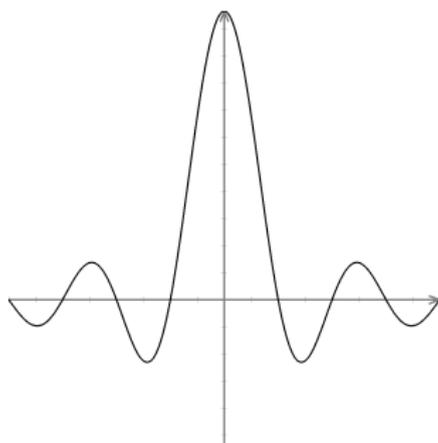
- PW_π es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor** (RKHS). Su núcleo reproductor es $k(t, s) = \text{senc}(t - s)$

$$f(s) = \langle f, \text{senc}(\cdot - s) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad s \in \mathbb{R}$$

La función seno cardinal

Seno cardinal

$$\text{senc } t := \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t}$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}\right)(t)$$



Una prueba debida a Hardy

- Desarrollamos \hat{f} en la base ortonormal $\{e^{-inw}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]} \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}$$

- Aplicando la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\right)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{senc}(t-n), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

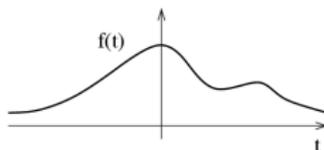
- Convergencia en norma L^2 implica convergencia puntual, que es uniforme en \mathbb{R}
- Carácter incondicional de una base ortonormal implica convergencia absoluta
- La sucesión $\left\{ \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **base ortonormal** del espacio PW_π
- Aplicando la identidad de Parseval,

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2, \quad f \in PW_\pi$$

(Conservación de la energía de las señal)

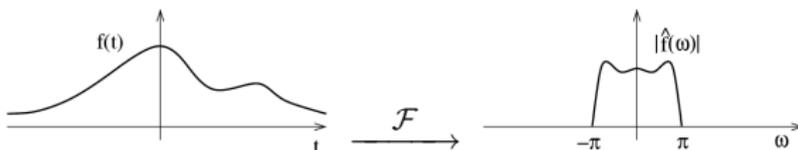
Interpretación de la dualidad de Fourier

$$f \in PW_{\pi}$$

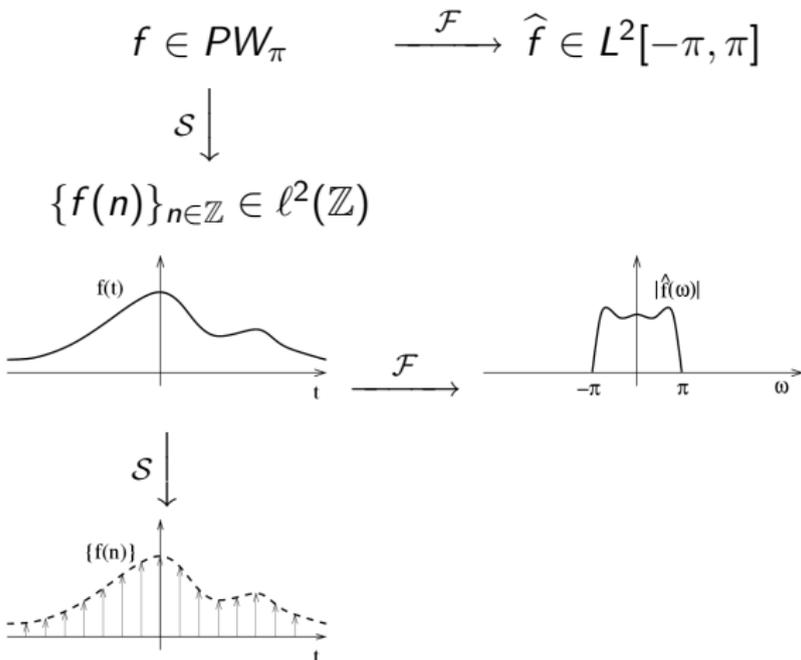


Interpretación de la dualidad de Fourier

$$f \in PW_{\pi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$$



Interpretación de la dualidad de Fourier



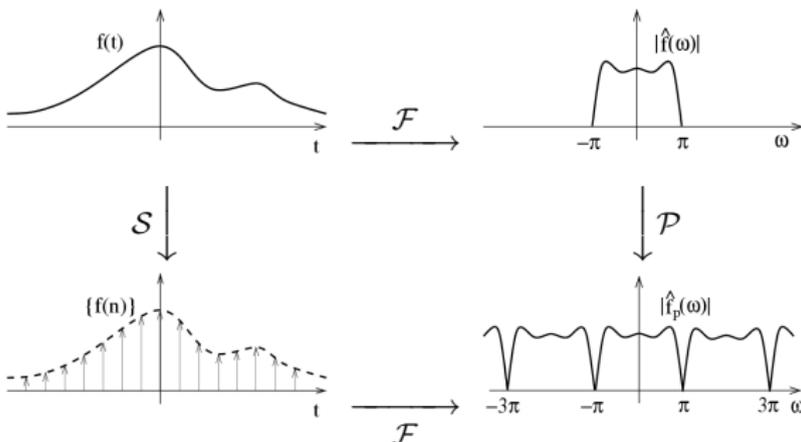
Interpretación de la dualidad de Fourier

$$f \in PW_{\pi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$$

$$S \downarrow$$

$$\downarrow \mathcal{P}$$

$$\{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}_p \in L^2_p[-\pi, \pi]$$



Undersampling y oversampling

Dado un periodo de muestreo $T_s > 0$ consideramos las muestras $\{f(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $f \in PW_\pi$. Consideramos la versión $\frac{2\pi}{T_s}$ -periodizada de \hat{f}

$$\hat{f}_p(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right)$$

Undersampling y oversampling

$$\widehat{f}_p(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right)$$

Desarrollando \widehat{f}_p con respecto a la base ortonormal

$$\left\{ \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} e^{-imT_s\omega} \right\}_{m \in \mathbb{Z}} \text{ de } L^2[0, 2\pi/T_s]$$

Fórmula sumatoria de Poisson

$$\widehat{f}_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_s) \frac{e^{-imT_s\omega}}{\sqrt{2\pi}}$$

Undersampling y oversampling

$$\hat{f}_p(\omega) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right)$$

Fórmula sumatoria de Poisson

$$\hat{f}_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_s) \frac{e^{-imT_s\omega}}{\sqrt{2\pi}}$$

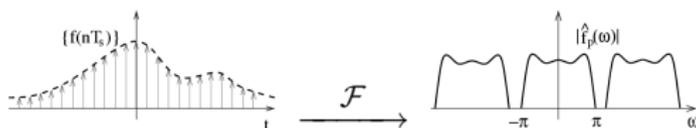
Consecuencia

Muestrear una señal con periodo T_s equivale a **periodizar su espectro** con periodo $2\pi/T_s$

Undersampling y oversampling

Primer caso: $0 < T_s \leq 1$

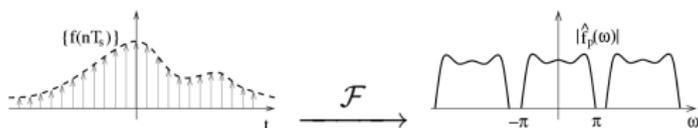
Oversampling



Undersampling y oversampling

Primer caso: $0 < T_s \leq 1$

Oversampling

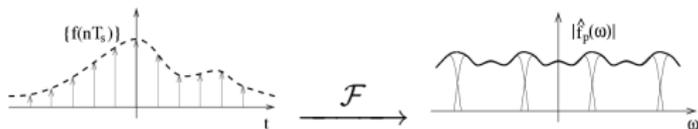


- Ventaja del oversampling

Undersampling y oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

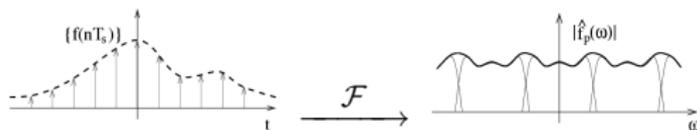
Undersampling



Undersampling y oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

Undersampling

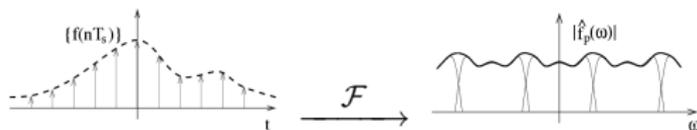


- **Frecuencia Nyquist:** H. Nyquist (1928) *Certain topics in telegraph transmission theory*
- Fenómeno de *aliasing*

Undersampling y oversampling

Segundo caso: $T_s > 1$

Undersampling



- **Frecuencia Nyquist:** H. Nyquist (1928) *Certain topics in telegraph transmission theory*
- Fenómeno de *aliasing*

Nota Histórica

- Teorema WSK (Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)
- E. T. Whittaker (1915) y J. M. Whittaker (1935): Estudio de las series cardinales
- K. Ogura (1920): *On a certain transcendental integral function in the theory of interpolation*
- V. Kotel'nikov (1933): *On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications*
- C. E. Shannon (1949): *Communication in the presence of noise*
- I. Someya (1949): *Waveform Transmission*

- Soporte de \widehat{f} simétrico: Para f real y bandalimitada

$$|\widehat{f}(w)|^2 = \widehat{f}(w)\overline{\widehat{f}(w)} = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w), \quad \text{a.e. } w$$

- Si $\text{supp } \widehat{f} \subseteq [w_0 - \pi, w_0 + \pi]$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{iw_0(t-n)} \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- Toda función $f \in PW_\pi$ se recupera a partir de sus muestras $\{f(n + \alpha)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ cualquiera que sea el $\alpha \in \mathbb{R}$. Desarrollando \widehat{f} respecto a la base ortonormal $\{e^{-i(n+\alpha)w} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y aplicando \mathcal{F}^{-1} se obtiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n + \alpha) \text{senc}(t - n - \alpha), \quad t \in \mathbb{R}$$

- Para $f \in L^2(\mathbb{R})$ la fórmula $\langle f, \text{senc}(\cdot - t) \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$ da la **proyección ortogonal** $P_{PW_\pi} f$ de f sobre PW_π
- **Fórmula interpolatoria tipo-Lagrange:**

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \text{senc}(t - n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{P(t)}{(t - n)P'(n)}$$

$$\text{donde } P(t) := \frac{\text{sen } \pi t}{\pi}$$

- En el **espacio de Paley-Wiener** $PW_{\pi\sigma}$ en donde $\text{supp } \hat{f} \subseteq L^2[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, se verifica que $T_s = \frac{2\pi}{2\pi\sigma} = \frac{1}{\sigma}$. Para $f \in PW_{\pi\sigma}$ se verifica

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\text{sen } \pi(\sigma t - n)}{\pi(\sigma t - n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Su núcleo reproductor es: $k_{\pi\sigma}(t, s) = \sigma \text{senc } \sigma(t - s)$

- Regularidad de $\widehat{f} \implies$ decaimiento más rápido de f en ∞ .
 $\text{senc}(t) = O\left(\frac{1}{|t|}\right)$ cuando $|t| \rightarrow +\infty$ debido a las discontinuidades de $\chi_{[-\pi,\pi]}$
- Problemas numéricos: Si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de las muestras $\{f(n) + \delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ el error cometido es:

$$\left| \sum_n \frac{(-1)^n \delta_n}{\pi(n - \frac{1}{2})} \right|$$

Podría valer infinito aunque $|\delta_n| \leq \delta$

- Solución: **Técnica de oversampling**

Técnica de oversampling

Supongamos $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi\sigma, \pi\sigma] \subset [-\pi, \pi]$ donde $\sigma < 1$

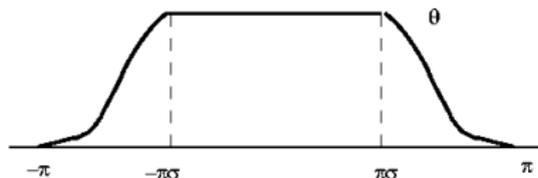
Sea θ una función suficientemente regular tal que

$$\theta(w) := \begin{cases} 1 & w \in [-\pi\sigma, \pi\sigma] \\ 0 & w \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Técnica de oversampling

Supongamos $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi\sigma, \pi\sigma] \subset [-\pi, \pi]$ donde $\sigma < 1$
Sea θ una función suficientemente regular tal que

$$\theta(w) := \begin{cases} 1 & w \in [-\pi\sigma, \pi\sigma] \\ 0 & w \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$



Técnica de oversampling

Supongamos $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-\pi\sigma, \pi\sigma] \subset [-\pi, \pi]$ donde $\sigma < 1$
 Sea θ una función suficientemente regular tal que

$$\theta(w) := \begin{cases} 1 & w \in [-\pi\sigma, \pi\sigma] \\ 0 & w \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Entonces

$$\hat{f}(w) = \sum_n f(n) \theta(w) \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \text{ en } L^2[-\pi, \pi]$$

$$f(t) = \sum_n f(n) S(t-n) \text{ en } PW_\pi$$

↓

donde $S(t-n) = \mathcal{F}^{-1}[\theta(w)e^{-inw}/\sqrt{2\pi}](t)$

- PW_π como un RKHS de funciones enteras:
 $f \in PW_\pi$ se extiende a \mathbb{C} como:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{izw} dw, \quad z \in \mathbb{C}$$

Aplicando Cauchy-Schwarz:

$$|f(z)| \leq \|f\| e^{\pi|z|}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Teorema clásico de Paley-Wiener:

$$PW_\pi = \{f \in H(\mathbb{C}); |f(z)| \leq Ae^{\pi|z|}; f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

- Validez de la fórmula de muestreo en otros espacios funcionales: Clases de Paley-Wiener PW_σ^p , Espacios de Bernstein B_σ^p , etc.

Transformada de Fourier en sentido distribucional

- Sea $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ con $\text{supp } T \subset (-\pi, \pi)$.
- Si $\hat{\theta} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \hat{\theta} \subset (-\pi, \pi)$ y $\hat{\theta} \equiv 1$ en un abierto conteniendo a $\text{supp } T$

Teorema de Campbell (1968)

Sea $f = \mathcal{F}^{-1}T$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\theta(z-n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) [\text{senc}(\cdot - n) * \theta](z), \quad z \in \mathbb{C}$$

uniformemente en compactos de \mathbb{C}

Estudio de errores

- **Error de truncamiento**

Para $f \in PW_\pi$ se cumple que

$$\left| f(t) - \sum_{n=-N}^N f(n) \operatorname{senc}(t-n) \right|^2 \leq \|f\|^2 - \sum_{n=-N}^N |f(n)|^2$$

- Error time-jitter
- Error de aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- **Error time-jitter**

$$\{f(n + \delta_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \implies \text{muestreo irregular}$$

- Error de aliasing

Estudio de errores

- Error de truncamiento
- Error time-jitter
- **Error de aliasing**

Si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se cumple que

$$\left| f(t) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \operatorname{senc}(t - n) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|w| > \pi} |\hat{f}(w)| dw$$

Muestreo multidimensional

Si f es bandalimitada al cuadrado $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, es decir,

$$f(t, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x, y) e^{itx} e^{isy} dx dy$$

entonces

$$f(t, s) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} f(n, m) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)} \frac{\text{sen } \pi(s - m)}{\pi(s - m)}, \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

En general, si $\text{supp } \hat{f} \subseteq B$ con $B \subset \mathbb{R}^d$ acotado, la *reconstrucción eficiente* de f depende de la geometría del conjunto B

Muestreo usando la transformada de Hilbert

Transformada de Hilbert

Dada $f \in PW_\pi$, su transformada de Hilbert está definida por

$$\tilde{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (-i \operatorname{sgn} w) \hat{f}(w) e^{iwt} dw, \quad t \in \mathbb{R}$$

La sucesión $\{i(\operatorname{sgn} w) e^{-inw} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$. Desarrollando \hat{f} en dicha base y aplicando \mathcal{F}^{-1} , se obtiene

$$f(t) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(n) \operatorname{senc} \frac{1}{2}(t-n) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(t-n), \quad t \in \mathbb{R}$$

Muestreo usando la transformada de Hilbert

Señal analítica asociada a una señal real $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$f_a := f + i\tilde{f} \implies \hat{f}_a = \hat{f} + i(-i \operatorname{sgn})\hat{f} = 2\hat{f}u$$

i.e., $\operatorname{supp} \hat{f}_a \subseteq [0, +\infty)$ (u es la función de Heaviside)

Se verifica que $\lim_{y \rightarrow 0^+} F(t + iy) = f_a(t)$ a.e. donde

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty 2\hat{f}(w) e^{izw} dw \in H^2(\mathbb{C}^+)$$

Muestreo usando la transformada de Hilbert

Muestreo señales pasobanda

Supongamos f real con $\text{supp } \hat{f} \subseteq [-w_0 - \pi, -w_0] \cup [w_0, w_0 + \pi]$

Entonces

$$f_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{w_0}^{w_0+\pi} 2\hat{f}(w)e^{iwt} dw$$

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a(2n)e^{iw_1(t-2n)} \frac{\text{sen } \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $w_1 = w_0 + \frac{\pi}{2}$. Como $f = \Re f_a$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f(2n) \cos w_1(t-2n) - \tilde{f}(2n) \text{sen } w_1(t-2n)\} \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}(t-2n)}{\frac{\pi}{2}(t-2n)}$$

Análisis multirresolución de Shannon

La sucesión de subespacios $\{PW_{2^m\pi}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ forma un Análisis Multirresolución (MRA) en $L^2(\mathbb{R})$

Una **wavelet madre** asociada es

$$\psi(t) = \cos \frac{3\pi}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right) \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{\pi}{2} \left(t - \frac{1}{2}\right)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Es decir, la sucesión

$$\{\psi_{m,n}(t) := 2^{m/2} \psi(2^m t - n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

es una **base ortonormal** de $L^2(\mathbb{R})$

Contenidos

- 1 La teoría clásica de Shannon
 - El teorema de Shannon: propiedades
 - Comentarios, generalizaciones, etc.
- 2 Recuperación estable: frames en un espacio de Hilbert separable
 - Guía básica de frames
 - Muestreo irregular en PW_π
 - Muestreo con derivadas
- 3 Muestreo en espacios invariantes por traslación
 - Inconvenientes de la teoría de Shannon
 - Teoría de muestreo en V_φ^2

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} se define un *operador de muestreo* lineal y acotado \mathcal{M} :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} : \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} se define un *operador de muestreo* lineal y acotado \mathcal{M} :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

Recuperación **estable** de $x \in \mathcal{H}$ a partir de la sucesión de escalares $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \implies$ La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser un **frame** en \mathcal{H} :

Existen constantes $A, B > 0$ (cotas frame) tal que:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathcal{H}$$

Teoría de muestreo: motivación matemática

En un espacio de Hilbert separable \mathcal{H} se define un *operador de muestreo* lineal y acotado \mathcal{M} :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}: \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

Aplicación al muestreo en un espacio de Hilbert funcional \mathcal{H} :

La sucesión de muestras asociada con una función $f \in \mathcal{H}$ coincide con una sucesión de productos internos $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert auxiliar \mathbb{H} relacionado con \mathcal{H}

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :

$$T : \begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H} \\ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \end{array}$$

- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- Dos casos particulares:
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:

$$\begin{aligned} T^* : \mathcal{H} &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- **Dos casos particulares:**
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$x \longmapsto Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- **Dos casos particulares:**
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle S^{-1} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, S^{-1} x_n \rangle x_n$$

($\{S^{-1} x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es el **frame dual canónico**)

- **Dos casos particulares:**
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (overcomplete frames) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duals) tales que:

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- **Dos casos particulares:**

El operador

$$T : \begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H} \\ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \end{array}$$

es **inyectivo**: La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **base de Riesz**
 $\{S^{-1}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es su única **base biortonormal** ($\langle S^{-1}x_n, x_m \rangle = \delta_{n,m}$)

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- **Dos casos particulares:**

El operador

$$T : \begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{H} \\ \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \end{array}$$

es **unitario**: La sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una **base ortonormal**
 S^{-1} es el operador identidad

Guía básica de frames

- Asociado a un frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} se define el operador *preframe* T :
- Su operador adjunto T^* es:
- Su composición nos da el *operador frame* $S := TT^*$:
- Se puede recuperar $x \in \mathcal{H}$ a partir de $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ (en general, de manera no única) como:
- **Dos casos particulares:**
- Si el frame $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es base (**overcomplete frames**) existen otros frames $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (duales) tales que:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n \rangle x_n, \quad x \in \mathcal{H}$$

Muestreo irregular en PW_π

Como

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{iwt} dw = \left\langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]}$$

Muestreo estable en PW_π en los puntos de muestreo $\{t_n\}$ equivale a encontrar **bases de Riesz**, **frames** de exponenciales complejas $\{e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi}\}$ en $L^2[-\pi, \pi]$

Paley-Wiener (1934): *Fourier transforms in the complex domain*

Levinson (1940): *Gap and density theorems*

Duffin y Schaeffer (1952): *A class of nonharmonic Fourier series*

Muestreo irregular

Condición 1/4 de Kadec (1964)

$\sup_{n \in \mathbb{Z}} |t_n - n| < \frac{1}{4} \Rightarrow \{e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $L^2[-\pi, \pi]$

Teorema de Perturbación (Paley-Wiener)

Sea $\{e_n\}$ **base ortonormal** de \mathcal{H} y $\{f_n\}$ sucesión de \mathcal{H} . Supongamos existe $\lambda \in [0, 1)$ tal que

$$\left\| \sum_n c_n (e_n - f_n) \right\| \leq \lambda \sqrt{\sum_n |c_n|^2}$$

para toda sucesión $\{c_n\}$ finita. Entonces, $\{f_n\}$ es **base de Riesz** de \mathcal{H}

Muestreo irregular

Sea $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base biortonormal de $\{e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\widehat{f}(w) = \sum_n f(t_n) h_n(w) \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi]$$

Aplicando \mathcal{F}^{-1}

$$f(t) = \sum_n f(t_n) \mathcal{F}^{-1}(h_n)(t) \quad \text{en } PW_\pi$$

Muestreo irregular

$$f(t) = \sum_n f(t_n) \mathcal{F}^{-1}(h_n)(t) \quad \text{en } PW_\pi$$

Teorema de Paley-Wiener-Levinson (1934–1940)

Para toda $f \in PW_\pi$ se tiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) \frac{G(t)}{(t - t_n)G'(t_n)}$$

donde

$$G(t) := (t - t_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_{-n}}\right) \left(1 - \frac{t}{t_n}\right)$$

Muestreo con derivadas

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{iwt} dw; \quad f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) i w e^{iwt} dw$$

Un par de bases de Riesz duales en $L^2[-\pi, \pi]$ apropiadas para el muestreo con derivadas son:

$$\left\{ x_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{|w|}{\pi} \right) e^{-2inw} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \cup \left\{ y_n = \frac{i \operatorname{sgn} w}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-2inw} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

y

$$\left\{ x_n^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-2inw} \right\} \cup \left\{ y_n^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} i w e^{-2inw} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Muestreo con derivadas

Desarrollando \hat{f} según la base $\{x_n\} \cup \{y_n\}$

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sqrt{2}f(2n)x_n - \sqrt{2}f'(2n)y_n] \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi]$$

Aplicando \mathcal{F}^{-1}

Jagerman & Fogel (1956)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(2n) + (t - 2n)f'(2n)] \operatorname{senc}^2\left(\frac{t - 2n}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Contenidos

- 1 La teoría clásica de Shannon
 - El teorema de Shannon: propiedades
 - Comentarios, generalizaciones, etc.
- 2 Recuperación estable: frames en un espacio de Hilbert separable
 - Guía básica de frames
 - Muestreo irregular en PW_π
 - Muestreo con derivadas
- 3 Muestreo en espacios invariantes por traslación
 - Inconvenientes de la teoría de Shannon
 - Teoría de muestreo en V_φ^2

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**

Matemáticamente, se corresponde con multiplicar el espectro de la señal por $\chi_{[-\pi,\pi]}$, lo que equivale en el dominio temporal a convolucionar con la función senc, que no se anula en el intervalo $(-\infty, 0)$. En la práctica no se puede construir, de manera exacta, tal filtro ya que ello implicaría conocer el futuro para calcular la salida del filtro en el momento actual (el filtro no es *causal* o *físicamente realizable*):

$$(f * \text{senc})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \text{senc } x \, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**

Una función bandalimitada puede extenderse a todo \mathbb{C} resultando una función entera que no podrá anularse en un intervalo de \mathbb{R} salvo que sea la función nula

- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo
- En varias variables, es **ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo**

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy mal localizada en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy **mal localizada** en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**

Por ejemplo, si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(n) + \varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, el error que se comete $|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{\pi(\frac{1}{2}-n)}|$, podría ser infinito incluso cuando $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{Z}$

- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy **mal localizada** en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy **mal localizada** en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy **mal localizada** en tiempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\operatorname{senc} t|^2 dt = +\infty$$

- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Inconvenientes de la teoría de muestreo de Shannon

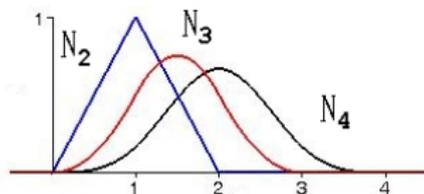
- Se basa en el uso de un **filtro paso-bajo ideal**
- La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en **contradicción con la idea de señal de duración finita**
- La operación de bandalimitar una señal genera **oscilaciones de Gibbs**
- La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy **ineficientes los cálculos en el dominio temporal**
- El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia pero, muy **mal localizada** en tiempo
- En varias variables, es ineficiente suponer que una señal es bandalimitada a un rectángulo

Escoger un **generador** φ con **buenas propiedades** (B-splines) y desarrollar una teoría de muestreo en el espacio:

$$V_{\varphi}^2 := \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n) : \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\} \subset L^2(\mathbb{R}).$$

B-splines

$\varphi = N_m$ donde N_m es el B-spline de orden $m - 1$, i.e.,
 $N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1$ (m veces) donde $N_1 := \chi_{[0,1]}$



El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **base de Riesz** de V_φ^2
- φ es continua en \mathbb{R}
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t - n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R}

La suma puntual $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n)$ define una función continua en \mathbb{R}

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **base de Riesz** de V_φ^2

Una sucesión $\{\varphi(\cdot - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de V_φ^2 si y sólo si $0 < \|\Phi\|_0 \leq \|\Phi\|_\infty < \infty$, donde $\|\Phi\|_0$ denota el ínfimo esencial de la función $\Phi(w) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + k)|^2$ en $(0, 1)$, y $\|\Phi\|_\infty$ su supremo esencial

- φ es continua en \mathbb{R}
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t - n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R}

La suma puntual $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n)$ define una función continua en \mathbb{R}

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **base de Riesz** de V_φ^2
- φ es continua en \mathbb{R}
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t - n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R}

La suma puntual $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n)$ define una función continua en \mathbb{R}

El espacio invariante por traslación V_φ^2

Suponemos las siguientes hipótesis sobre el generador φ :

- La sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una **base de Riesz** de V_φ^2
- φ es continua en \mathbb{R}
- La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\varphi(t - n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R}

La suma puntual $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t - n)$ define una función continua en \mathbb{R}

V_φ^2 es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor

Los funcionales evaluación en V_φ^2 están acotados:

Para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo se tiene

$$|f(t)|^2 \leq \frac{\|f\|^2}{\|\Phi\|_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t - n)|^2, \quad f \in V_\varphi^2.$$

Convergencia en norma $L^2(\mathbb{R})$ en el espacio V_φ^2 implica convergencia puntual, que resulta ser, además, uniforme en \mathbb{R}

El isomorfismo \mathcal{T}_φ

El espacio V_φ^2 es la imagen del espacio $L^2(0, 1)$ mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\Phi : L^2(0, 1) &\longrightarrow V_\varphi^2 \\ \{e^{-2\pi i n w}\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

El isomorfismo \mathcal{T}_φ

El espacio V_φ^2 es la imagen del espacio $L^2(0, 1)$ mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\varphi : L^2(0, 1) &\longrightarrow V_\varphi^2 \\ \{e^{-2\pi i n w}\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Los coeficientes de cada función $f \in V_\varphi^2$ son los coeficientes de Fourier estándar de la función $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f \in L^2(0, 1)$

El isomorfismo \mathcal{T}_φ

El espacio V_φ^2 es la imagen del espacio $L^2(0, 1)$ mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi : L^2(0, 1) &\longrightarrow V_\varphi^2 \\ \{e^{-2\pi i n w}\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

- Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$f(t) = \langle F, K_t \rangle_{L^2(0,1)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y

$$K_t(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(t - n)} e^{-2\pi i n w} = \overline{Z\varphi(t, w)}$$

($Z\varphi$ es la **transformada de Zak** de φ)

El isomorfismo \mathcal{T}_φ

El espacio V_φ^2 es la imagen del espacio $L^2(0, 1)$ mediante el isomorfismo:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\varphi : L^2(0, 1) &\longrightarrow V_\varphi^2 \\ \{e^{-2\pi i n w}\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

- $K_{t+m}(w) = e^{-2\pi i m w} K_t(w)$, $t \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$
- $\mathcal{T}_\varphi[e^{-2\pi i m w} F(w)] = f(t - m)$ donde $f = \mathcal{T}_\varphi(F)$

Un teorema de muestreo en V_φ^2

La sucesión $\{K_{a+m}(w) = e^{-2\pi imw} K_a(w)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz en $L^2(0, 1)$ si y sólo si $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$, donde

$$\|K_a\|_0 := \operatorname{ess\,inf}_{w \in (0,1)} |K_a(w)|; \quad \|K_a\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{w \in (0,1)} |K_a(w)|$$

Teorema de muestreo en V_φ^2 (Walter, 1992)

Supongamos $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$. Entonces, para cada $f \in V_\varphi^2$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n), \quad t \in \mathbb{R}$$

donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi(1/\overline{K_a})$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en \mathbb{R}

Algunos ejemplos para B-splines

- ① En el espacio $V_{N_2}^2$ se verifica la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) N_2(t + 1 - n), \quad t \in \mathbb{R}$$

- ② En el espacio $V_{N_3}^2$ se verifica la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n + 1/2) S_{1/2}(t - n), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } S_{1/2}(t) = 4\sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2\sqrt{2} - 3)^{|n+1|} N_3(t - n)$$

- ③ En el espacio $V_{N_4}^2$ se verifica la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) S(t - n), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{donde } S(t) = \sqrt{3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n (2 - \sqrt{3})^{|n|} N_4(t - n + 2)$$

Muestreo generalizado en V_φ^2

Consideremos un espacio invariante por traslación V_φ^2 de $L^2(\mathbb{R})$

Dados s **sistemas de convolución** \mathcal{L}_j , $j = 1, \dots, s$ actuando en V_φ^2

$$\mathcal{L}_j(f) = f * h_j, \quad f \in V_\varphi^2$$

donde la respuesta impulsional

- $h_j \in L^2(\mathbb{R})$ (**average sampling**)
- h_j es una delta de Dirac (**muestreo usual**)

Muestreo generalizado en V_φ^2

Consideremos un espacio invariante por traslación V_φ^2 de $L^2(\mathbb{R})$
 Dados s **sistemas de convolución** \mathcal{L}_j , $j = 1, \dots, s$ actuando en V_φ^2

$$\mathcal{L}_j(f) = f * h_j, \quad f \in V_\varphi^2$$

donde la respuesta impulsional

- $h_j \in L^2(\mathbb{R})$ (**average sampling**)
- h_j es una delta de Dirac (**muestreo usual**)

Problema del muestreo generalizado:

Recuperar, de manera estable, toda función $f \in V_\varphi^2$ a partir de la sucesión de muestras

$$\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$$

Muestreo generalizado en V_φ^2

Consideremos un espacio invariante por traslación V_φ^2 de $L^2(\mathbb{R})$

Dados s **sistemas de convolución** \mathcal{L}_j , $j = 1, \dots, s$ actuando en V_φ^2

$$\mathcal{L}_j(f) = f * h_j, \quad f \in V_\varphi^2$$

donde la respuesta impulsional

- $h_j \in L^2(\mathbb{R})$ (**average sampling**)
- h_j es una delta de Dirac (**muestreo usual**)

Intuitivamente, $s \geq r$ y se deberá de satisfacer una condición de estabilidad del tipo:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(\mathcal{L}_j f)(rn)|^2 \leq B\|f\|^2, \quad f \in V_\varphi^2$$

Una expresión para las muestras

Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$(\mathcal{L}_j f)(t) = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(t, \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}f$.

Una expresión para las muestras

Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$(\mathcal{L}_j f)(t) = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(t, \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}f$.

En particular:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_j f)(rn) &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(rn, \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \\ &= \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(0, \cdot) e^{-2\pi i rn \cdot} \rangle_{L^2(0,1)} \end{aligned}$$

Una expresión para las muestras

Para cada $f \in V_\varphi^2$ se tiene

$$(\mathcal{L}_j f)(t) = \langle F, \overline{Z\mathcal{L}_j\varphi}(t, \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1}f$.

Consecuencia:

Hay que estudiar sucesiones del tipo:

$$\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s} \quad \text{en } L^2(0,1)$$

Sucesiones $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}$ en $L^2(0, 1)$

Sea la sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$, donde $b_j \in L^2(0, 1)$ para $j = 1, 2, \dots, s$.

Sea \mathbf{B} la matriz $s \times r$ de funciones definidas en $(0, 1)$ dada por

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} b_1(w) & b_1(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_1(w + \frac{r-1}{r}) \\ b_2(w) & b_2(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_2(w + \frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s(w) & b_s(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_s(w + \frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

(consideramos extensiones 1-periódicas de las funciones b_j)

Sucesiones $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}$ en $L^2(0, 1)$

$$\mathbf{B}(w) := \begin{bmatrix} b_1(w) & b_1(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_1(w + \frac{r-1}{r}) \\ b_2(w) & b_2(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_2(w + \frac{r-1}{r}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_s(w) & b_s(w + \frac{1}{r}) & \cdots & b_s(w + \frac{r-1}{r}) \end{bmatrix}$$

(consideramos extensiones 1-periódicas de las funciones b_j) y las constantes

$$\alpha_{\mathbf{B}} := \operatorname{ess\,inf}_{w \in (0, 1/r)} \lambda_{\min}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]; \quad \beta_{\mathbf{B}} := \operatorname{ess\,sup}_{w \in (0, 1/r)} \lambda_{\max}[\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)]$$

λ_{\min} (λ_{\max}) denota el autovalor más pequeño (más grande) de la matriz $\mathbf{B}^*(w)\mathbf{B}(w)$

Se verifica el siguiente resultado:

- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es un sistema **completo** en $L^2(0, 1)$ si y sólo si el rango de la matriz $\mathbf{B}(w)$ es r a.e. en $(0, 1/r)$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **sucesión Bessel** en $L^2(0, 1)$ si y sólo si $b_j \in L^\infty(0, 1)$ para $j = 1, \dots, s$ (o equivalentemente, $\beta_{\mathbf{B}} < \infty$). En este caso, la cota Bessel óptima es $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es un **frame** en $L^2(0, 1)$ si y sólo si $0 < \alpha_{\mathbf{B}} \leq \beta_{\mathbf{B}} < \infty$. En este caso, las cotas frame óptimas son $\alpha_{\mathbf{B}}/r$ and $\beta_{\mathbf{B}}/r$.
- La sucesión $\{b_j(w)e^{2\pi irnw}\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **base de Riesz** de $L^2(0, 1)$ si y sólo si es un frame y $s = r$.

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Dada $f \in V_\varphi^2$, para cada $j = 1, 2, \dots, s$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_j f)(rn) &= \langle F(\cdot), \bar{g}_j(\cdot) e^{-2\pi i rn \cdot} \rangle_{L^2(0,1)} \\
 &= \left\langle \sum_{k=0}^{r-1} F(w + k/r) g_j(w + k/r), e^{-2\pi i rn w} \right\rangle_{L^2(0,1/r)}, \quad n \in \mathbb{Z},
 \end{aligned}$$

donde $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f$ y $g_j(w) = (Z\mathcal{L}_j\varphi)(0, w)$.

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_1 f)(rn) e^{-2\pi i rn w}, \dots, \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_s f)(rn) e^{-2\pi i rn w} \right)^\top$$

donde,

$$\mathbf{F}(w) := \left(F(w), F\left(w + \frac{1}{r}\right), \dots, F\left(w + \frac{r-1}{r}\right) \right)^\top$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$\mathbf{G}(w)\mathbf{F}(w) = r \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_1 f)(rn) e^{-2\pi i rn w}, \dots, \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_s f)(rn) e^{-2\pi i rn w} \right)^\top$$

donde,

$$\mathbf{F}(w) := \left(F(w), F\left(w + \frac{1}{r}\right), \dots, F\left(w + \frac{r-1}{r}\right) \right)^\top$$

Supongamos que $g_j \in L^\infty(0, 1)$, y sea $\mathbf{a} := [a_1(w), \dots, a_s(w)]$ un vector, con entradas en $L^\infty(0, 1)$, tal que

$$[a_1(w), \dots, a_s(w)] \mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0] \text{ a.e. en } (0, 1).$$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

Entonces,

$$F(w) = r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) a_j(w) e^{-2\pi i n r w} \quad \text{en } L^2(0, 1).$$

Consecuencia:

Las sucesiones $\{\bar{g}_j(w) e^{-2\pi i r n w}\}$ y $\{r a_j(w) e^{-2\pi i r n w}\}$ son **frames duales** en $L^2(0, 1)$

Muestreo generalizado regular en V_φ^2

El isomorfismo \mathcal{T}_φ da la siguiente fórmula de muestreo en V_φ^2 :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \mathcal{T}_\varphi \left[r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) a_j(\omega) e^{-2\pi i n r \omega} \right] (t) \\
 &= r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) \mathcal{T}_\varphi [a_j(\cdot) e^{-2\pi i r n \cdot}] (t) \\
 &= r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) (\mathcal{T}_\varphi a_j)(t - rn) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn)
 \end{aligned}$$

Un teorema de muestreo generalizado regular

Supongamos que $g_j \in L^\infty(0, 1)$ ($\equiv \beta_{\mathbf{G}} < \infty$), $j = 1, 2, \dots, s$.

Son condiciones equivalentes:

- ① $\alpha_{\mathbf{G}} > 0$
- ② Existe un frame en V_φ^2 de la forma $\{S_{j,a}(t - rn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ tal que, para todo $f \in V_\varphi^2$,

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^s (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(\cdot - rn) \quad \text{en } L^2(\mathbb{R})$$

- ③ Existen funciones $a_j \in L^\infty(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, s$, tal que

$$[a_1(w), \dots, a_s(w)] \mathbf{G}(w) = [1, 0, \dots, 0]$$

a.e. en $(0, 1)$

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en \mathbb{R}
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w) [\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0, 1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una base de Riesz en V_φ^2 . La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,

$$S_{j,\mathbf{a}}(t) = r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle a_j(w), e^{-2\pi i n w} \rangle \varphi(t-n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_j(n) \varphi(t-n), \quad t \in \mathbb{R}$$

- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en \mathbb{R}
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w) [\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0, 1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **base de Riesz** en V_φ^2 . La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,a} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en \mathbb{R}
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w) [\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0, 1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,a}(t - sn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **base de Riesz** en V_φ^2 . La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,a} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en \mathbb{R}
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w) [\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0, 1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,a}(t - sn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **base de Riesz** en V_φ^2 . La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

En las condiciones del teorema:

- $S_{j,\mathbf{a}} = r\mathcal{T}_\varphi(a_j)$, $j = 1, 2, \dots, s$, i.e.,
- La convergencia de la serie es **absoluta** y **uniforme** en \mathbb{R}
- Los **frames duales** con la misma estructura se obtienen a partir de la primera fila de las matrices:

$$\mathbf{A}(w) = \mathbf{G}^\dagger(w) + \mathbf{U}(w) [\mathbf{I}_s - \mathbf{G}(w)\mathbf{G}^\dagger(w)],$$

donde $\mathbf{G}^\dagger(w) = [\mathbf{G}^*(w)\mathbf{G}(w)]^{-1}\mathbf{G}^*(w)$ y $\mathbf{U}(w)$ es cualquier matrix $r \times s$ con entradas en $L^\infty(0, 1)$

- Si $r = s$ entonces $\{S_{j,\mathbf{a}}(t - sn)\}_{n \in \mathbb{Z}, j=1,2,\dots,s}$ es una **base de Riesz** en V_φ^2 . La primera fila de la matriz $\mathbf{G}^{-1}(w)$ nos da las funciones $a_j(w)$.

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$f(t) = \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn)$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$f(t) = \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn)$$

$$S_{j,a}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_j(k) \varphi(t - k)$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) d_j(m - rn) \right\} \varphi(t - m) \end{aligned}$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) d_j(m - rn) \right\} \varphi(t - m) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \varphi(t - m)
 \end{aligned}$$

Comentarios al teorema

Interpretación en términos de filtros digitales:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) S_{j,a}(t - rn) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left\{ \sum_{j=1}^s \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{L}_j f)(rn) d_j(m - rn) \right\} \varphi(t - m) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \varphi(t - m)
 \end{aligned}$$

En el caso de oversampling ($s > r$), podemos intentar buscar funciones de reconstrucción $S_{j,a}$ con propiedades prefijadas: con soporte compacto (filtros FIR), con decaimiento exponencial, etc.

Un ejemplo en $V_{N_3}^2$

En el espacio $V_{N_3}^2$ consideramos los sistemas de convolución

$$\mathcal{L}_1 f(t) := f(t); \quad \mathcal{L}_2 f(t) := f\left(t + \frac{2}{3}\right); \quad \mathcal{L}_3 f(t) := f\left(t + \frac{4}{3}\right)$$

Escogiendo el periodo $r = 2$, la matriz $\mathbf{G}(w)$ es una matriz 3×2 cuyas entradas son polinomios trigonométricos.

Buscamos una matriz 1×3 $\mathbf{a}(w)$, cuyas entradas sean polinomios trigonométricos, tal que

$$[a_1(w), a_2(w), a_3(w)] \mathbf{G}(w) = [1, 0]$$

Un ejemplo en $V_{N_3}^2$

Se obtiene así la siguiente fórmula de muestreo en $V_{N_3}^2$:

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=1}^3 \mathcal{L}_j f(2n) S_{j,a}(t - 2n), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde las funciones de muestreo están dadas por

$$S_{1,a}(t) = \frac{1}{16} [N_3(t+3) - 3N_3(t+2) - 3N_3(t+1) + N_3(t)],$$

$$S_{2,a}(t) = \frac{1}{16} [27N_3(t+1) - 9N_3(t)],$$

$$S_{3,a}(t) = \frac{1}{16} [-9N_3(t+1) + 27N_3(t)], \quad t \in \mathbb{R}.$$

